UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA
ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS, TECNOLOGÍA E INGENIERÍA
CIENCIAS BÁSICAS

LÓGICA MATEMÁTICA

GEORFFREY ACEVEDO GONZÁLEZ

Medellín, 2011

MÓDULO
CURSO LÓGICA MATEMÁTICA
PRIMERA EDICIÓN (EN EDICIÓN)

ISBN
2011
Centro Nacional de Medios para el Aprendizaje

Actualización, Edición y Diagramación Georffrey Acevedo González
Medellín, Colombia. 28 de Julio de 2011 (material en prensa)

Este material tiene como referencia principal el módulo diseñado por la Dra. Nubia Janeth Galindo Patiño en el año de 1999 para la Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD. Santa Fe de Bogotá. D.C. 1999

Portada: Aristóteles según un manuscrito de su *Historia naturalis*. Roma 1457 (Cod. vindob. phil. gr.).

Medellín Colombia Julio de 2011.

¡OH dicha de entender, mayor que la de imaginar o la de sentir! Borges.

Introducción

Este módulo está concebido para ser un curso introductorio a la lógica Matemática.

Antes de dar inicio al desarrollo de los temas del curso, y en general, para toda actividad, es importante que nos interroguemos por el origen y propósito de dicho conocimiento, ¿Qué problemas buscó resolver el hombre mediante dicho conocimiento? ¿Qué preguntas vamos a contestar con el aprendizaje del curso? ¿Qué competencias se espera que el estudiante desarrolle? ¿Por qué se consideran importantes estas competencias? ¿Por qué, siendo yo un estudiante de regencia de farmacia, o un estudiante de ingeniería, o mejor aún, un estudiante de psicología, debo tomar el curso de Lógica Matemática?

Entre las competencias que debe tener un estudiante, se destaca su capacidad para construir razonamientos deductivos e inductivos, tal que le permitan verificar hipótesis así como generar nuevas, una competencia necesaria, no sólo para la investigación científica, sino necesaria para actividades como proponer argumentos válidos en un ensayo o para debatir ideas.

Se considera que la lógica matemática acompañada de las competencias lingüísticas permite plantear las mejores soluciones a diferentes tipos de problemas. Al punto que son estas las competencias que son evaluadas por las universidades para determinar el acceso a programas de educación superior.

La competencia lógico matemática no hace referencia exclusiva a operaciones con representaciones simbólicas y ejercicios complejos. En este curso aprenderás cómo en nuestro lenguaje cotidiano hacemos uso de los razonamientos lógicos deductivos e inductivos, siguiendo unas estructuras básicas que nos permiten afirmar que un razonamiento es o no válido.

Ya Platón en la República nos propone que antes del estudio de una ciencia social como lo es la filosofía era necesaria la preparación de la mente por medio del estudio de la geometría euclidiana, en la cual el discípulo debía entrenarse haciendo demostraciones de teoremas de la geometría, demostraciones que sólo se logran siguiendo una secuencia lógica de pasos ordenados.

Hoy, muchas instituciones educativas exigen a sus aspirantes a cualquier programa académico, presentar pruebas de admisión que pretenden evaluar las competencias tanto lingüísticas como lógico matemáticas. Mediante estas evaluaciones, las instituciones pretenden elegir entre todos sus aspirantes a aquellos que se encuentren más preparados para aprender. Esto es para comprender y elaborar razonamientos lógicos deductivos e inductivos cada vez más complejos.

En este sentido, el curso de lógica matemática es importante para mejorar en la interpretación y construcción de razonamientos lógicos presentes tanto en el lenguaje cotidiano como en todas las áreas especializadas del conocimiento. Es por esta razón que el curso de lógica matemática es un curso transversal a todos los programas académicos ofertados por la Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD.

Para leer el módulo sólo se requieren conceptos de conjuntos numéricos, y operaciones algebraicas básicas. La intención es que el estudiante pueda aprender de este módulo por sí mismo, en este sentido es un texto escrito más para los estudiantes que para el tutor.

En el curso de lógica matemática, analizaremos diferentes operaciones entre conjuntos, tales como unión, intersección y complemento, entre otras operaciones, que nos permitirán aclarar la comprensión de las relaciones entre los conectivos lógicos usados en el lenguaje natural, partiendo para ello una representación gráfica. A la par desarrollaremos las destrezas lógico matemáticas, dando solución a problemas como éste:

> "*De acuerdo con una encuesta virtual realizada a cincuenta estudiantes de la UNAD, los amantes de la música de Juanes son 15; mientras que los que únicamente gustan de la música de Shakira son 20, ¿Cuántos son fanáticos de los dos artistas si 10 de los encuestados, entre los 25 que no son fanáticos de Shakira, afirman ser fanáticos de Juanes?"*

Comprenderemos cómo trabajan los conectivos lógicos que usamos diariamente en nuestro leguaje y que pocas veces nos detenemos a analizar y a comprender, por ejemplo, nuestro amigo **"Boole afirma que cuando gane su equipo predilecto hará fiesta**"**,** pasado un tiempo encontramos que Boole está festejando pero que su equipo predilecto ha perdido ¿Se está contradiciendo el amigo Boole con su afirmación inicial?, En este curso descubriremos y analizaremos el conectivo lógico que ha usado Boole en su afirmación para concluir sobre este asunto.

Identificar los conectivos lógicos, las premisas y comprender su función en el lenguaje nos permitirá diseñar frases cada vez más complejas sin que se pierda la coherencia en la construcción gramatical.

Posteriormente aprenderemos ha simplificar expresiones complejas o difíciles de descifrar usando el lenguaje natural, para ello utilizaremos leyes expresadas por medio de símbolos. Por ejemplo, al expresar en lenguaje natural que "**es falso que Augustus no miente**"; por medio de la lógica aprendemos a llegar a la simplificación: **"Augustus miente**" mediante el Algebra de Boole, utilizando leyes lógicas básicas que nos permiten validar la simplificación hecha con un argumento más allá de la simple intuición.

Gracias al desarrollo informático un estudiante de psicología, puede implementar una función lógica en una hoja de cálculo como Excel o Calc, que le permita obtener en segundos el resultado de la aplicación de un Test psicológico a una población. En general, gracias a los principios básicos de la lógica se pueden implementar funciones de aplicación en todas las áreas del conocimiento.

Otra interesante aplicación de la lógica es en el proceso de validar nuestros argumentos. Por ejemplo, analicemos que puede concluirse de la siguiente afirmación: **"si llueve hace frío",** posteriormente **"ocurre que hace frío",** ¿es entonces correcto concluir que llueve?, Por medio de la lógica transformaremos esta expresión en lenguaje simbólico que posteriormente podremos analizar por medio de una tabla de verdad y descubrir en qué caso específico la conclusión puede no derivarse de sus premisas.

En el mundo de la argumentación siempre estamos utilizando unos principios lógicos básicos que estudiaremos en el curso de Lógica Matemática, permitiéndonos mejorar en la construcción de argumentos más fuertes, basados en los cimientos de la lógica.

Buen Viento y Buena mar.

Georffrey Acevedo González.[1]

[1]*Tutor de Ciencias Básicas de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD desde 1995. Ingeniero Electrónico de la Universidad de Antioquia. Maestro en educación del Tecnológico de Monterrey. www.georffrey.com georffrey.acevedo@unad.edu.co georffrey@gmail.com*

CONTENIDO

INDICE DE TABLAS

INDICE DE FIGURAS

INDICE DE ILUSTRACIONES

Símbolos usados

Conjuntos:

$\cup$	Conjunto universal
$\varnothing, \phi$	Conjunto vacío

Operaciones entre conjuntos:

$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$-$	Diferencia
Δ	Diferencia simétrica
$\subset$	Contenido en
$\not\subset$	No está contenido en

Relaciones entre elementos y conjuntos

$\in$	Pertenece a
$\notin$	No pertenece a

Conectivos lógicos:

$\wedge$	Conjunción
$\vee$	Disyunción
$\neg$, ~	Negación
$\rightarrow$	Implicación
$\leftrightarrow$	Equivalencia

Indicadores de relación:

$<$	Menor que
$\leq$	Menor o igual que
$>$	Mayor que
$\geq$	Mayor o igual que
$\neq$	Diferente a

Conjuntos numéricos:

$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturales
$\mathbb{Z}$	Conjunto de números enteros
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto de números enteros positivos
$\mathbb{Z}^-$	Conjunto de números enteros negativos
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reales
$\mathbb{C}$	Conjunto de números complejos

Objetivo General

Proporcionar al estudiante herramientas que le permitan reconocer, elaborar y determinar la validez de razonamientos lógicos tanto deductivos como inductivos.

Objetivos específicos

Desarrollar las competencias para expresar razonamientos lógicos en lenguaje simbólico.

Identificar y aplicar las diferentes leyes de la lógica en procesos de argumentación, al llevarlas al lenguaje natural.

Hacer uso de principios del Álgebra Booleana para simplificar expresiones del lenguaje natural.

Desarrollar competencias para la construcción de funciones lógicas en programas de computación, como las hojas de cálculo o de lenguajes de programación.

Conducta de entrada

Para alcanzar un aprendizaje significativo, tres condiciones importantes son necesarias: La significatividad psicológica, la significatividad lógica del material y la **motivación**. Para tal fin, se han estructurado las diferentes herramientas pedagógicas y didácticas del curso en tres fases de aprendizaje: reconocimiento, profundización y transferencia.

A continuación daremos inicio a la fase de reconocimiento, en la cual, partiremos de las experiencias previas de aprendizaje, ya sean éstas adquiridas en el estudio de un campo específico del conocimiento o adquiridas en el desarrollo de actividades diferentes a las académicas.

“Para lograr este objetivo se ha diseñado una actividad didáctica, que dispone el ambiente para que por medio de algunas herramientas y técnicas, puedas objetivar esas experiencias previas alcanzadas en tu mundo vital.

De esta manera, lograrás pasar del mundo impensado de las experiencias a la sistematización de las mismas, o de las prenociones a las nociones. Es decir, se trata de un ejercicio de motivación para que te involucres en los procesos iniciales de aprendizaje y actives tus estructuras cognitivas”. Salazar (2008)

Pero, ante todo, debemos contar con tu disposición para el aprendizaje. Para contribuir con el factor de la motivación, se ha dispuesto el primer OVA, objeto virtual de aprendizaje, el cual es un audio en mp3 con algunos elementos que te motivará para el desarrollo de las competencias del curso.

¿Cuántas horas debo dedicar al estudio del curso de lógica matemática?

El curso de lógica matemática es un curso de dos créditos académicos, por lo tanto un curso de dos unidades.

Un crédito académico corresponde a 48 horas de estudio, de las cuales 12 horas son de acompañamiento tutorial y 36 horas son de estudio independiente.

Esto significa que para matricular el curso de lógica matemática deberás disponer de 72 horas de estudio independiente. Para un período académico es de 16 semanas, y si consideramos 100 días en el proceso, considerando las pausas activas, esto se traducirá en un promedio de una (1) hora diaria.

En ninguna otra metodología como en la educación a distancia, debemos hacer una cuidadosa gestión del tiempo. La invitación es para desarrollar un cronograma de organización de las actividades académicas de acuerdo a los temas de cada curso y al tiempo disponible.

Reconocimiento

A continuación daremos inicio a la fase de reconocimiento, en la cual, partiremos de las experiencias previas de aprendizaje. Recuerda que la disposición frente al conocimiento es una condición para lograr un aprendizaje significativo:

1. ¿Qué entiendes por lógica?

   ____
   ____
   ____
   ____

2. ¿Podríamos hacer un debate de ideas sin hacer uso de la lógica? Analiza cuándo hacemos uso de la lógica.

   ____
   ____
   ____
   ____

3. ¿Qué recuerdas de la evolución histórica de la lógica?

   ____
   ____
   ____
   ____

4. Analiza porqué es importante la competencia lógico matemática para apropiar nuevo conocimiento.

   ____
   ____
   ____
   ____

5. En tus palabras, plantea la diferencia entre lenguaje simbólico y lenguaje natural

____
____
____
____

6. ¿Cuál es tu definición intuitiva de conjunto?

____
____
____
____

7. Plantea varios ejemplos de conjuntos. ¿Cómo describirías un conjunto con una cantidad infinita de elementos?

____
____
____
____
____

8. ¿Cómo representas un conjunto?

____
____
____
____
____

9. ¿Qué formas de determinar un conjunto conoces?

____
____
____

____
____

10. ¿Cómo definirías un conjunto finito, infinito, vacío, unitario, universal y de partes?

____
____
____
____
____

11. ¿Qué relación conoces entre conjuntos y entre conjuntos y sus elementos? ¿Cómo se representan éstas?

____
____
____
____
____

12. ¿Cuán son iguales dos conjuntos? ¿Cuándo son completamente diferentes?

____
____
____
____
____

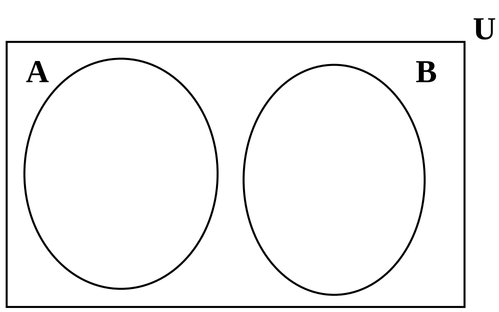
13. ¿Qué operaciones entre conjuntos conoces?

____
____
____
____
____

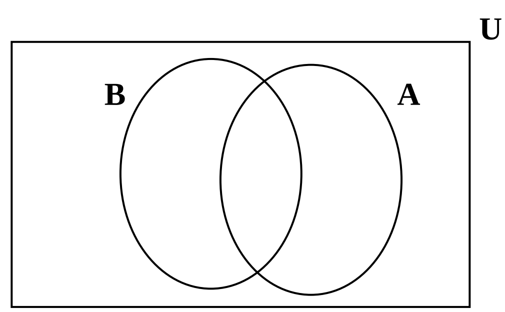
14. ¿Qué conoces del álgebra de conjuntos? ¿Cuáles leyes recuerdas? ¿Cómo harías una demostración gráfica de estas leyes? ¿Cómo aplicarías el principio de dualidad en estas leyes?

15. En los siguientes diagramas sombrea las áreas correspondientes a las operaciones señaladas:

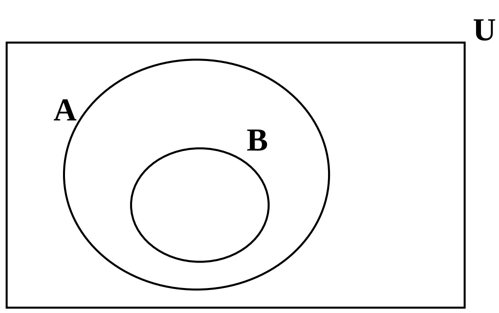
15.1. A unión B



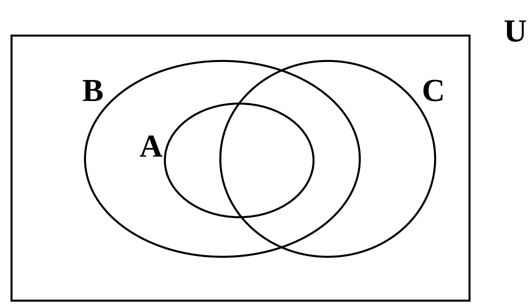
a.



b.

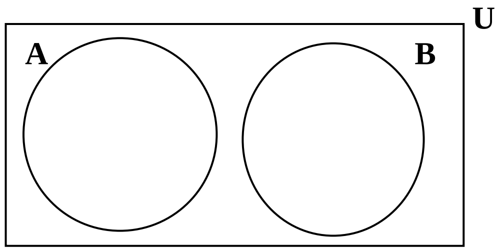


c.

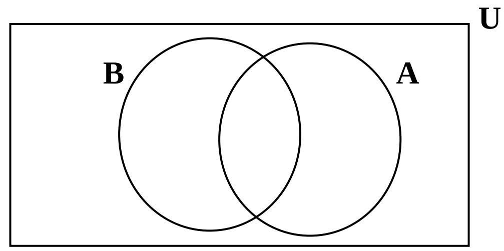


d.

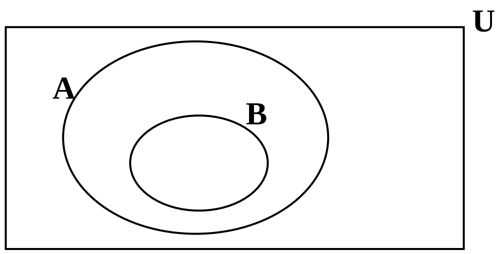
15.2. A intersección B



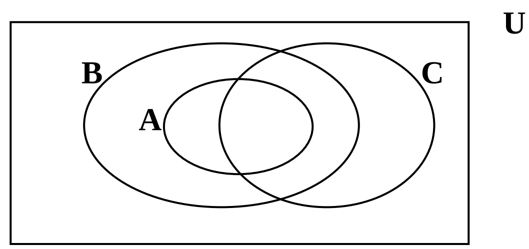
a.



b.

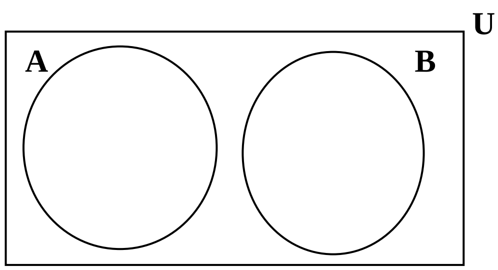


c.

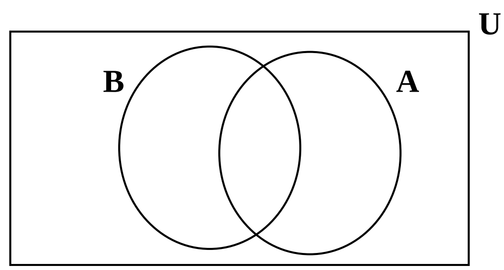


d.

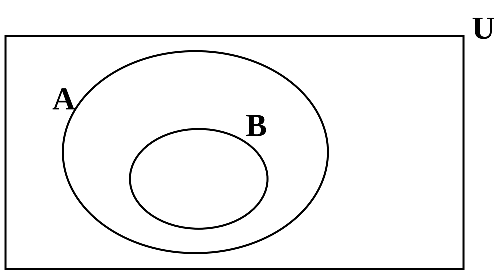
15.3. A menos B



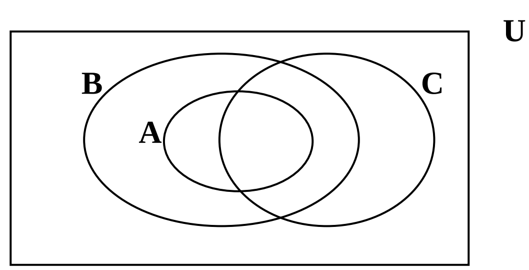
a.



b.



c.



d.

16. Propón una expresión de la cual puedas decir que es verdadera. ¿Cómo expresarías la negación de la misma proposición?

____
____
____

17. ¿Te has encontrado con un argumento que parece lógico, pero que cuando lo analizamos detenidamente encontramos que no era tal? A continuación se propone plantearlo:

____
____
____
____
____

18. Menciona las características comunes que encuentras en un razonamiento

____
____
____
____
____

19. Describe, cómo determinas la validez de un argumento

____
____
____
____
____

20. Entre dos personas inmersas en un debate. ¿Cómo podríamos determinar que el argumento de uno es más fuerte que el del otro?

____
____
____
____

Profundización

Querido estudiante, en los temas que encontrarás a continuación iniciamos el proceso de asociación de los saberes previos con conceptos específicos del curso de lógica matemática.

En esta fase encontrarás material y actividades didácticas diseñadas para que puedas apropiar conceptos y teorías que te permitirán alcanzar las metas de aprendizaje establecidas para el curso.

Unidad 1

Principios de Lógica

Introducción

En esta unidad, partiremos de la contextualización histórica de la lógica hacia la definición de la unidad fundamental de la lógica “la proposición”. Aprenderemos a identificar y clasificar las proposiciones, y estableceremos criterios e instrumentos de comparación entre los diferentes tipos de proposiciones.

Justificación

Esta unidad es significativamente importante en la formación de cualquier profesional, desde la óptica de la necesidad de la apropiación de una fundamentación conceptual básica para fortalecer la destreza en la identificación de las proposiciones como elemento fundamental de la lógica y la comprensión de la relación biunívoca entre el lenguaje simbólico y el lenguaje natural. Estas herramientas nos permitirán desarrollar las competencias para el desarrollo de la segunda unidad, en donde, haciendo uso de lo aprendido nos introduciremos en el análisis de validez de los razonamientos lógicos.

Intencionalidades formativas

Propósitos

- Contribuir al desarrollo de habilidades de pensamiento en estudiantes de diferentes programas que oferta la UNAD mediante la activación cognitiva de operaciones mentales que faciliten la apropiación de nociones, definiciones, axiomas y leyes que constituyen fundamentos básicos en teoría de conjuntos.

- Desarrollar en el estudiante habilidades de comunicación en contextos diversos mediante la articulación de lenguajes icónicos, simbólicos o artificiales como el de la lógica proposicional para dinamizar procesos de aprendizaje en diferentes campos del saber.

Objetivos

- Que el estudiante comprenda nociones, conceptos, definiciones y operaciones básicas que configuran la fundamentación teórica sobre conjuntos mediante el estudio y análisis de las fuentes documentales propuestas articuladas a situaciones específicas donde es pertinente su aplicación.
- Que el estudiante relacione expresiones del lenguaje simbólico y del lenguaje natural mediante análisis comparativo e interpretación de la funcionalidad de las variables lógicas y operacionabiliadad de los conectivos lógicos como elementos estructurales de la lógica proposicional transcribibles a otras formas de comunicación en diferentes contextos del saber.

Metas

- El estudiante presentará y sustentará informes de trabajo como resultado del estudio y análisis de los fundamentos de la teoría de conjuntos, en donde evidencie la utilización de nociones, conceptos, definiciones y operaciones básicas en el análisis de situaciones específicas por él definidas.
- El estudiante planteará y formulará expresiones lógicas en lenguaje natural y lenguaje simbólico como evidencia del análisis comparativo e interpretativo de la función que cumplen variables y conectores lógicos como elementos estructurales de las expresiones lógicas en el estudio de situaciones particulares propuestas para tal fin.

Competencias

- El estudiante comprende y aplica de manera suficiente nociones, conceptos, definiciones, axiomas y leyes que fundamentan la teoría general de conjuntos en el estudio y análisis de las fuentes documentales referenciadas para dinamizar el proceso de aprendizaje y en situaciones específicas donde es pertinente su aplicabilidad.
- El estudiante relaciona e interpreta expresiones del lenguaje simbólico y del lenguaje natural en la formulación y representación de estructuras semánticas lógicas en términos de variables y conectores lógicos como elementos estructurales de la lógica proposicional articulables a diferentes formas de comunicación en diversos contextos.

Capítulos de la unidad:

Capítulo 1: Introducción a la lógica
Capítulo 2: Tautologías
Capítulo 3: Cuantificadores y círculos de Euler

CAPÍTULO 1

1 Capítulo: Introducción a la Lógica

Objetivo general

- El propósito de este capítulo es brindar al estudiante algunos elementos del desarrollo histórico de la lógica matemática y su correspondiente clasificación. Así como de brindar las herramientas para identificar y construir proposiciones lógicas.

Objetivos específicos

- Realizar la clasificación de la lógica
- Reconocer el propósito de la lógica
- Determinar la diferencia entre lenguaje natural y artificial
- Analizar los componentes del proceso semiótico
- Distinguir las áreas de la semiótica
- Identificar y construir proposiciones lógicas simples y compuestas
- Construir tablas de verdad

Lección No.1 Introducción a la lógica

1.1 Contextualización Histórica de la Lógica

“Conócete a ti mismo” ("gnosei seauton") es la frase que aparecía en el santuario del Dios Olímpico Apolo y que se atribuye a Tales de Mileto (639 a.c), quien es considerado como el primer representante de la filosofía occidental: tanto así como para reconocérsele como el iniciador de la indagación racional sobre el universo, a Tales de Mileto se atribuye plantear explicaciones de la naturaleza sin hacer referencia a lo sobrenatural.

Es así, como los precursores de la filosofía, llamados los «presocráticos», representaron una innovación en el pensamiento, al tratar de explicar las cosas por si mismas.

En el período Socrático, los filósofos pasarán de preocuparse por los temas de la naturaleza a ocuparse en el hombre. En este período aparecen los sofistas, quienes profundizan en el “arte de discutir”, a ellos debemos lo que en la lógica se denomina un sofisma, argumentos que parecen válidos pero que realmente no lo son.

Originalmente logos significa palabra o discurso, por lo que en un principio se definió la lógica como la rama de la gramática que se ocupaba de ciertas formas de lenguaje.

Como la palabra es la expresión, o manifestación del pensamiento y el pensamiento racional es la base de la filosofía, puede decirse en general, que la lógica es la ciencia del pensamiento racional; es importante aclarar que la lógica no se ocupa del contenido de los pensamientos sino de la manera o forma de los pensamientos.

En respuesta a la necesidad de construir argumentos, para defender o refutar pensamientos de los demás, **Aristóteles,** considerado por los griegos. “El padre de la lógica”, creo métodos sistemáticos para analizar y evaluar dichos argumentos, para lo cual desarrolló la lógica proposicional estableciendo procedimientos para determinar la verdad o falsedad de proposiciones compuestas.

El gran matemático **Gottfried Leibniz** en 1646 fue el primero en intentar reformar la lógica clásica, planteando que la dependencia lógica entre proposiciones es demostrada reduciendo argumentos complejos en simples, para lo cual propuso representar el conocimiento, en una

forma que pudiera ser usado por un razonamiento mecánico y a éste esquema (lógica simbólica) lo llamó una **característica universal.**[2]
El proceso de la lógica continuó en el siglo XIX. En 1847 el matemático inglés **George Boole** en compañía de **Augustus de Morgan** hizo notar el parentesco entre las operaciones lógicas con las matemáticas, pues a partir de los operadores aritméticos de adición, multiplicación y sustracción crearon los operadores lógicos equivalentes de unión, intersección y negación; además formularon los principios del razonamiento simbólico y el análisis lógico. A **Boole** se le atribuye la invención de las tablas de verdad para comprobar la veracidad de proposiciones compuestas. [3]

Este trabajo fue retomado por **Bertrand Russell** y **Alfred Whitehead** en 1910 en su obra "Principio Matemático", quienes codificaron la lógica simbólica en su presente forma definiéndola como la "**Ciencia de todas las operaciones conceptuales posibles**", por esta razón la fundación de la lógica formal moderna se le atribuye a ellos. [4]

1.2 Clasificación de la lógica

La lógica se puede clasificar como lógica tradicional o no formal y lógica simbólica o formal:

1. **Lógica tradicional o no formal.**
2. **Lógica simbólica o formal.**

En la lógica no formal o lógica tradicional se considera la destreza para interpretar y distinguir un razonamiento correcto de un razonamiento incorrecto como un producto de la experiencia humana obtenida en la relación con el mundo circundante. En palabras de Galindo (1999), se consideran los procesos psicobiológicos del pensamiento lógico.

La lógica como ciencia constituye la lógica formal o simbólica, la cual se encarga de investigar, desarrollar y establecer los principios fundamentales que siguen la validez de la inferencia; es considerada como uno de los sistemas mediante el cual se llega a formas puras y rigurosas. [5]

[2] Galindo Patiño N. J. (1999). Lógica Matemática. Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD. Santa Fe de Bogotá. D.C. 1999

[3,4,5] Galindo Patiño N. J. (1999). Lógica Matemática. Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD. Santa Fe de Bogotá. D.C. 1999

En el pensamiento simbólico, las palabras se manipulan, según las reglas establecidas, como si fueran simples signos sin preocuparse por su sentido.

De allí, que afirmemos que la lógica se ocupa de la forma de los pensamientos y no de su contenido.

1.3 Propósito de la lógica

La lógica ofrece métodos que enseñan cómo formar proposiciones, evaluar sus valores de verdad y determinar si unas conclusiones se pueden deducir correctamente a partir de proposiciones supuestas; además, la lógica es una ciencia que se interesa por las relaciones existentes entre las proposiciones, con el fin de obtener precisión, claridad y generalidad en los razonamientos.

La precisión la logra mediante el uso de símbolos, los cuales tienen como función primordial eliminar las ambigüedades que la estructura del lenguaje ordinario no puede evitar con facilidad.

La claridad y generalidad, la consigue en la medida en que el usuario se familiariza con los elementos básicos de un argumento lógico, tanto en su representación simbólica como en su significado para luego establecer un lenguaje simbólico artificial, que le permita simplificar argumentos lógicos complicados; de esta manera, el símbolo permite concentración sobre lo esencial de un contexto dado, incrementando la fiabilidad con que se aplica el conocimiento. [6]

1.4 Lógica y Lingüística

Por su origen y desarrollo natural, han sido reconocidos dos tipos básicos de lenguajes: los lenguajes naturales y los lenguajes formales o artificiales.

Los lenguajes naturales no se establecieron a través de ninguna teoría, entre ellos están el castellano, el francés y el inglés. Las teorías y gramáticas de

[6] Galindo Patiño N. J. (1999). Lógica Matemática. Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD. Santa Fe de Bogotá. D.C. 1999

lenguajes naturales, fueron establecidas a posteriori, es decir después de que el lenguaje ya había madurado.

Los lenguajes formales como las matemáticas y la lógica, fueron desarrollados, generalmente, a partir del establecimiento de una teoría, la cual da las bases para que a través de dichos lenguajes se pueda desarrollar la misma teoría.

Los lenguajes naturales y formales tienen puntos en común, en principio, se tiene la existencia de un conjunto finito llamado alfabeto, el cual esta constituido de símbolos simples llamados comúnmente letras. En los lenguajes naturales se tienen como ejemplos los alfabetos: latino, griego y árabe-persa, entre otros. En los formales como la lógica se tiene el léxico del cálculo proposicional y de predicados.

Mediante la concatenación de las letras del alfabeto se forman los monemas, fonemas o palabras que se encuentran en el interior de un enunciado, de tal forma que un lenguaje se considera como un conjunto infinito de oraciones o enunciados que se forman con palabras.

En los sistemas formales los enunciados del lenguaje consisten en una lista de símbolos, (lógicos o matemáticos) sujetos a diversas interpretaciones. En un lenguaje formal, las palabras y las oraciones están perfectamente definidas, una palabra mantiene el mismo significado prescindiendo del contexto o de su uso. Los lenguajes formales son, por esto, necesariamente exentos de cualquier componente semántico fuera de sus operadores y relaciones, y es gracias a esta ausencia de significado especial, que los lenguajes formales pueden ser usados para modelar una teoría de la ingeniería de sistemas, mecánica, eléctrica, entre otras. [7]

1.4.1 Lenguajes naturales y artificiales

Podemos considerar el lenguaje como un sistema de signos que expresan ideas y que se utiliza para establecer comunicación.

El hombre se comunica y participa de este proceso mediante el lenguaje natural humano; sin lenguaje, o con un lenguaje rudimentario, el hombre estaría limitado socialmente.

[7] Galindo Patiño N. J. (1999). Lógica Matemática. Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD. Santa Fe de Bogotá. D.C. 1999

Cuando el hombre aprende a nombrar todo lo que le rodea y luego es capaz de relacionar el objeto solamente con su nombre, el lenguaje se convierte en símbolo, es decir, toma vida independiente del objeto, de tal forma que se puede afirmar que el lenguaje no sólo es un instrumento de comunicación sino también de pensamiento; por lo tanto, para el hombre el lenguaje es exterior e interior, pues le permite establecer comunicación y mediante él acumula y transmite sus experiencias utilizando los procesos de simplificación y generalización.

De otra parte se puede hablar de lenguaje natural o artificial . El lenguaje natural nace de una organización espontánea de las capacidades lingüísticas de una comunidad, y se encuentra dotado de gran cantidad de signos, sobresalido las vocales; mientras que el lenguaje artificial se genera cuando una o más personas deciden usar signos especiales, para obtener mejor comunicación, estableciendo reglas que faciliten la operatividad entre los signos; por ejemplo, el lenguaje de la matemáticas, de la física, química y de otras ciencia. Este tipo de lenguaje posee gran cantidad de signos y nace de la exigencia de conservar información por lo que se le conoce como formas de comunicación, que pueden ser escritas por medio de íconos, con lenguajes analógicos y digitales. [8]

Lenguaje Natural

Imagen No. 1 **. Sócrates. Detalle de La escuela de Atenas - fresco de Raffaello Sanzio (1511)**

[8] Galindo Patiño N. J. (1999). Lógica Matemática. Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD. Santa Fe de Bogotá. D.C. 1999

Lenguaje Artificial

$$h^2 = a^2 + b^2$$

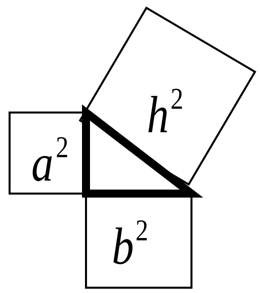


Figura No. 1 Teorema de Pitágoras.

Imagen No. 2. **Pitágoras (582 a.c).. Detalle. La escuela de Atenas - fresco de Raffaello Sanzio (1511)**

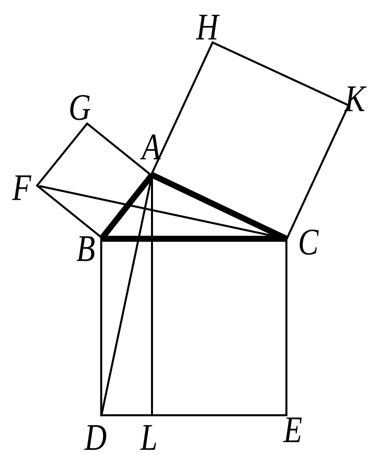


Imagen No. 3
Euclides. Padre de la Geometría.
Detalle. La escuela de Atenas - fresco de Raffaello Sanzio (1511)

1.5 Componentes del proceso semiótico

Iniciamos esta sección asignándole el término **semiótica** a la ciencia que estudia los sistemas de signos, se encarga de estudiar las condiciones de comunicabilidad y comprensibilidad de un mensaje, enseña en qué consisten los signos y cuáles son las leyes que los gobiernan.

En el proceso semiótico deben tenerse en cuenta tres vertientes: el emisor, el receptor y el contexto del mensaje.

El emisor es quien inicia la comunicación enviando un mensaje al receptor; esta operación implica un contexto (aquello de lo que se habla), signos y por lo tanto un código.

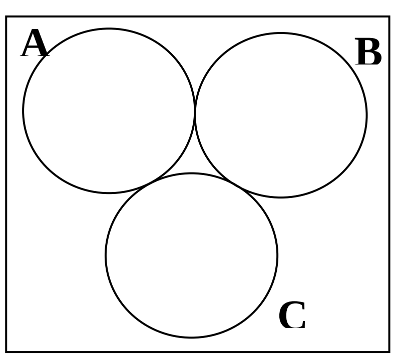
La función del signo consiste en comunicar ideas por medio de mensajes, estos signos pueden ser naturales: el humo significa fuego, nubes indicio de lluvia; o artificiales (símbolos): bandera, escudo; o analógicos (icónicos): fotografías, esquemas, etc.

El signo es el vehículo de toda comunicación y pensamiento. Sus características están determinadas por el lugar que el signo ocupa en el sistema y por sus relaciones con los demás signos de dicho sistema.

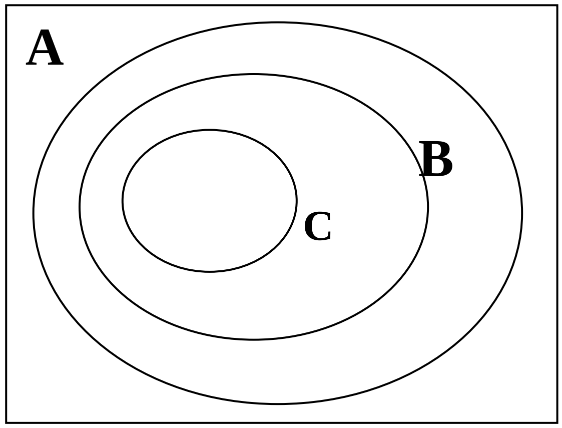
La función esencial de los códigos es evitar toda confusión entre el signo y el mensaje.

Si los signos se encuentran en una relación lógica de exclusión, de inclusión o de intersección, se pueden presentar tres tipos de códigos:

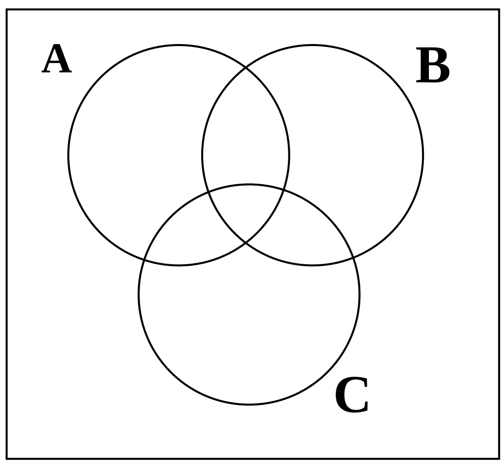
Exclusión:



Inclusión



Intersección



El emisor debe codificar el mensaje de tal forma que cuando el receptor reciba el mensaje y lo decodifique pueda reconstruir su sentido a partir de los signos y de las relaciones existentes entre ellos. [9]

[9] Galindo Patiño N. J. (1999). Lógica Matemática. Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD. Santa Fe de Bogotá. D.C. 1999

1.6 Ramas de la semiótica

Actualmente se reconocen tres áreas en el campo de la semiótica así: sintaxis, semántica y pragmática.

El primero establece con claridad y divulgar esta clasificación fue Morris en 1938, quien definió la pragmática como el estudio de "la relación de los signos con los intérpretes", la semántica como el de "las relaciones de los signos con los objetos a los que se aplican" y la sintaxis como el de las "relaciones formales entre los mismos signos". Galindo (1999)

Ejercicio Propuesto 1: A continuación te invitamos a plantear la pertinencia del curso de lógica matemática para tu programa de estudio:

____

____

____

____

____

____

____

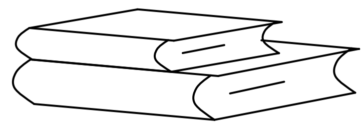
____

____

____

____

RESUMEN 1



La lógica se clasifica en:

1. **Tradicional o no formal**: son los procesos psicobiológicos del pensamiento lógico y métodos de inferencia, que permiten interpretar y distinguir el razonamiento correcto del incorrecto, mediante la experiencia humana, ya sea por el conocimiento o por la observación de su entorno.

2. **Formal o simbólica:** Es la encargada de investigar, desarrollar y establecer reglas de inferencia, que conducen a formas puras y rigurosas de pensamiento. La lógica simbólica, manipula las palabras como signos, sin tener en cuenta su sentido.

La lógica pretende que sus razonamientos se caractericen por:

1. **Precisión**: mediante el uso de signos

2. **Claridad**: en la medida que el usuario se familiariza con los elementos básicos de un argumento lógico en su forma (representación simbólica) y su significado.

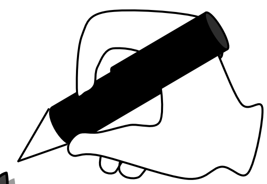
3. **Generalidad**: mediante el lenguaje simbólico artificial, el usuario, por una parte simplifica argumentos lógicos complicados y por otra parte, establece reglas que le permiten generalizar conceptos e incrementar la fiabilidad con que se aplica el conocimiento.

Lenguaje: Sistema de signos que expresan ideas y se utilizan para establecer comunicación.

Lenguaje natural: Nace de las capacidades lingüísticas de una comunidad.

Lenguaje artificial: Es aquel que utiliza signos para obtener una comunicación más precisa y clara.

AUTOEVALUACIÓN 1



Amigo estudiante, recuerda que la motivación es una de las tres condiciones para lograr un aprendizaje significativo:

1. ¿Cómo se puede definir la lógica?
2. ¿Elabore un resumen sintético de la historia de la lógica?
3. Mediante un cuadro sinóptico, clasifique la lógica con sus características fundamentales
4. ¿Cuál es el propósito de la lógica?
5. Escriba y explique las componentes del proceso semiótico.
6. Enuncie las ramas de la semiótica.

Lección No.2 Proposiciones

1.7 Proposiciones

La proposición lógica constituye el elemento fundamental de la lógica.

Una proposición lógica es un enunciado lingüístico que debe cumplir con la condición de ser susceptible de poder ser verdadero o falso.

Por ejemplo:

> "La temperatura ambiente es mayor de 20 grados" es un enunciado que puede ser Verdadero o Falso.

La proposición puede ser verdadera o falsa en un momento dado, decimos entonces que, el valor de verdad de una proposición lógica es, por definición, verdadero o falso, y es representado por las letras V o F.

El valor de verdad de la proposición de acuerdo a la relación de su contenido con la realidad no es el objeto de estudio de la lógica. Es por esta razón que se afirme que la lógica habla de lo posible, pero no de lo real. De esta manera, dada la proposición "hace frío", independiente de las creencias de cualquiera o de la realidad de que esté o no haciendo frío, independiente del lenguaje o de la forma lingüística usada como "la temperatura está baja", la lógica sólo se ocupa de la posibilidad de ser verdadero o falso de la proposición.

De allí que se suela afirmar que "la verdad lógica es una verdad formal, que no tiene contenido".

Observemos que las proposiciones se dan mediante un enunciado lingüístico, generalmente en la forma gramatical de oración enunciativa:

Recordemos que la oración enunciativa se corresponde con los actos de habla declarativos, los cuales comunican sin más, un hecho: "Juan es Colombiano". Estas expresiones contienen un sujeto perfectamente definido o dado por el contexto, un predicado y una conjugación del verbo ser, observemos algunos ejemplos:

Ejemplos:

- ✓ Hoy es sábado
- ✓ Soy estudiante de psicología
- ✓ New York es llamada la capital del mundo

De esta manera, podemos afirmar que la lógica se ocupa de las proposiciones. Más adelante, estudiaremos reglas que permiten la transformación de unas expresiones en otras equivalentes, y veremos como, de acuerdo a estas reglas o leyes lógicas, a partir del valor de verdad de una o varias proposiciones logramos inferir la verdad o falsedad de otras proposiciones.

1.7.1 Representación de las proposiciones

La lógica utiliza un lenguaje exacto que no da lugar a imprecisiones, para tal fin toma como elemento básico de análisis a la proposición, que no es otra cosa que una oración del lenguaje cotidiano con un significado mucho más limitado; en tales condiciones, se puede considerar una proposición como una excepción lingüística que tiene la propiedad de ser verdadera o falsa. Galindo (1999)

Las proposiciones se representan simbólicamente mediante el uso de letras minúsculas del alfabeto tales como **p, q, r, s, ..., x, y, z**, las cuales reciben el nombre de letras o variables proposicionales; de esta forma, el lenguaje proposicional se hace más simple y exacto que el lenguaje natural. Así, también se logra simplificar la escritura de argumentos lógicos complicados, creando un lenguaje simbólico artificial, en donde se establece un conjunto de reglas claras, bien definidas y que no presentan las ambigüedades ni vaguedades del lenguaje corriente o natural:

Los siguientes ejemplos ilustran cómo se pueden simbolizar las proposiciones:

Ejemplos:

p : Hoy es sábado

q : Estudio filosofía

r : Colombia es el país con el mayor número de especies de aves del mundo

x : 4 + 3 = 10

En el lenguaje cotidiano se encuentran expresiones como las siguientes:

Ejemplos:

- ✓ Las rosas son rojas **y** tienen espinas.
- ✓ ¿La selección Colombia ganó **o** perdió?
- ✓ En el país **no** hay violencia.
- ✓ **Si** estudio lógica matemática **entonces** podré determinar la validez de un razonamiento lógico.
- ✓ 4 es un número par **si y sólo si** se puede dividir por 2.

Para la formación de las oraciones del ejemplo anterior se utilizaron las expresiones especiales: **y, o, no, si … entonces, sí y sólo si**, que sirvieron para unir o enlazar los enunciados; denominamos a éstas partículas o términos de enlace "nexos o conectivas", que establecen relaciones sintácticas como función de coordinación y subordinación determinadas entre las proposiciones que la integran; tal ocurre en la función de las conjunciones en las oraciones compuestas de la lengua.

Al igual que a las proposiciones, también les asignamos un lenguaje simbólico así:

Tabla No. ***1 Lenguaje Natural y Artificial***

Lenguaje Natural	Lenguaje Artificial
y	$\wedge$
o	$\vee$
no	$\neg$
Si ……. entonces	$\rightarrow$
Si y sólo si	$\leftrightarrow$

Partiendo del ejemplo anterior, podemos hallar la notación simbólica de las expresiones planteadas:

Ejemplos:

- Las rosas son rojas **y** tienen espinas.

  p : Las rosas son rojas
  q : Las rosas tienen espinas

  $$p \wedge q$$

- ¿La selección Colombia ganó **o** perdió?

  r: La selección Colombia ganó?
  s: La selección Colombia perdió?

  $$r \vee s$$

- En el país **no** hay violencia.

  t : En el país hay violencia.

  $$\neg t$$

- **Si** estudio lógica matemática **entonces** podré determinar la validez de un razonamiento lógico

  x : Estudio lógica matemática
  y : Seré un destacado ingeniero de sistemas

  $$x \rightarrow y$$

- 4 es un número par **si y sólo si** se puede dividir por 2.

  u : 4 es un número par
  v : 4 es divisible por 2

  $$u \leftrightarrow v$$

1.7.2 Clasificación de las proposiciones

En lógica se consideran y se simbolizan dos clases de proposiciones: atómicas o simples y moleculares o compuestas, veamos:

1.7.2.1 Proposiciones simples

Se denominan proposiciones simples aquellas oraciones que no utilizan conectivos lógicos. Estos son algunos ejemplos:

p : El eclipse es un fenómeno natural
q : La luna es un satélite de la tierra
r : La UNAD es una universidad abierta
s: -3 es el inverso aditivo de 3.

El valor de verdad de una proposición simple puede ser verdadero (V) o falso (F), pero no los dos valores al mismo tiempo, pues dejaría de ser proposición. Recordemos que una proposición debe tener sentido completo, es decir debe ser posible asignarle un valor de verdad (es falsa o verdadera).

Ejemplos: $1 + 4 = 5$
3 es número par
Medellín es la capital de Antioquia

1.7.3 Proposiciones Compuestas

Si se unen dos o más proposiciones simples, mediante términos de enlace, tales como **no**, **y**, **o**, **si…entonces**, se forman las proposiciones compuestas; el valor de verdad de dichas proposiciones es verdadero o falso, dependiendo sólo de los valores de verdad de las proposiciones simples que las conforman.

Ejemplos: La igualdad de oportunidades conduce a la paz

Si un triángulo es isósceles, **entonces** es equilátero

Quieres gaseosa **o** helado

Las proposiciones compuestas son aquellas que se obtienen combinando dos o más proposiciones simples mediante términos de enlace.

Estos son algunos ejemplos de proposiciones compuestas:

- ✓ **Sean:** **p :** Está lloviendo
  q: El sol brilla

  $p \wedge q$ ***"****Está lloviendo* ***y*** *el sol brilla"*

- ✓ **Sean:** **x :** Quieres café?
  y : Quieres té?

  $x \vee y$ *"¿quieres café o té?"*

- ✓ **Sean:** **s :** Llueve
  r : Hace frío

  $r \rightarrow s$ *"Si llueve entonces hace frío"*

- ✓ **Sean:** **p :** Un triángulo es equilátero
  q: Un triángulo tiene sus tres lados iguales

  $$p \leftrightarrow q$$

  "Un triángulo es equilátero si y sólo si tiene sus tres lados iguales."

Lección No.3 Conectivos lógicos fundamentales

La veracidad o falsedad de una proposición compuesta, depende del valor de verdad de cada una de las proposiciones simples que la conforman y de la manera como están combinadas; para tal fin, en las próximas secciones estudiaremos más detenidamente la forma de enlazar o unir proposiciones simples de tal manera que se puedan fijar criterios para establecer cuándo una proposición compuesta es verdadera o falsa.

Veamos algunos ejemplos de oraciones que no son proposiciones porque no se les puede asignar un valor de verdad (falso o verdadero).

Ejemplos:

1. El triángulo es menor que el círculo

   Esta oración no es proposición, puesto que no especifica el criterio de comparación, es decir, el área, perímetro, …, entre las figuras geométricas.

2. $x + 5 = 8$

   Aquí, x es una variable independiente, por lo tanto puede tomar cualquier valor y por consiguiente no se puede afirmar nada.

Ejercicio Propuesto 2: Plantea cinco expresiones asociadas a tu programa de estudio que no sean proposicones y cinco expresiones que si lo sean:

Son proposiciones	No son proposiciones

1.8 Conectivos Lógicos

Como ya se dijo en la sección anterior, los símbolos que sirven para enlazar dos o más proposiciones simples, se llaman conectivos lógicos. Los conectivos lógicos son: la conjunción, la disyunción, la negación, el condicional y el bicondicional.

1.8.1 Conjunción: " ∧ "

Sean **p** y **q** dos proposiciones simples. La proposición compuesta **p** y **q** simbolizada por "**p** $\wedge$ **q**", se denomina la conjunción de **p** y **q**.

Ejemplo 1: $r \wedge s$: 6 es número par y entero positivo, en donde:

r : 6 es un número par.
$\wedge$: y
s : entero positivo.

Ejemplo 2: $p \wedge q$: Diego estudia psicoanálisis y Ana estudia conductismo.

p : Diego estudia psicoanálisis
$\wedge$ y
q : Ana estudia conductismo

Para determinar el valor de verdad de proposición compuesta formada por dos proposiciones simples unidas por una conjunción utilizaremos la representación gráfica mediante el uso de los diagramas de ***VENN***. Los diagramas de VENN, a través de áreas sombreadas muestran claramente el conjunto de verdad de la operación que se está realizando, veamos:

La siguiente figura representa el conjunto de verdad de la conjunción, donde:

U = {todas las personas}
P = {personas que juegan futbol}

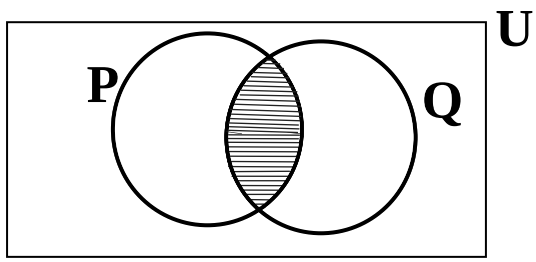


Figura No. 2 **Conjunción**

Q = {personas que son Colombianas}
P(x) = x es un jugador de fútbol
Q(x) = x es un Colombiano

$p(x) \cap q(x)$ **x** es un jugador de futbol **y** **x** es un Colombiano

$$P \cap Q = \{x / p(x) \wedge q(x)\} = \{\text{todas las personas que juegan futbol y son Colombianas}\}$$

Como se dijo en la sección anterior, el valor de verdad de una proposición compuesta no sólo depende del conectivo lógico, sino del valor de verdad de cada una de sus proposiciones simples. Por lo tanto, surgen las siguientes posibilidades:

Caso 1: Que **p** sea verdadera y **q** sea verdadera
Caso 2: Que **p** sea verdadera y **q** sea falsa
Caso 3: Que **p** sea falsa y **q** sea verdadera
Caso 4: Que **p** sea falsa y **q** sea falsa

Estudiemos estos cuatro casos en el ejercicio propuesto:

Caso 1:	r:	Santiago es jugado de futbol	
	s:	Santiago es Colombiano	
	$r \wedge s$:	Verdadera (V)	
Caso 2:	r:	Santiago es jugado de futbol	
	s:	Santiago no es Colombiano	
	$r \wedge s$:	Falsa (F)	
Caso 3:	r:	Santiago no es jugado de futbol	
	s:	Santiago es Colombiano	
	$r \wedge s$:	Falsa (F)	
Caso 4:	r :	Falsa.	Santiago no es jugado de futbol
	s:	Falsa.	Santiago no es Colombiano
	$r \wedge s$:	Falsa (F).	

A continuación se analizan estas posibilidades para el ejemplo 1:

Caso 1:	r:	Verdadera	6 es un número par
	s:	Verdadera	6 es un entero positivo
	$r \wedge s$:	Verdadera (V)	
Caso 2:	r:	Verdadera	6 es un número par
	s:	Falsa	6 no es un entero positivo
	$r \wedge s$:	Falsa (F)	
Caso 3:	r:	Falsa	6 no es un número par
	s:	Verdadera	6 es un entero positivo
	$r \wedge s$:	Falsa (F)	
Caso 4:	r :	Falsa	6 no es un número par
	s:	Falsa	6 no es un entero positivo
	$r \wedge s$:	Falsa (F)	

Podemos resumir estos resultados utilizando la siguiente tabla, llamada tabla de verdad de la conjunción:

Tabla No. 2 ***Tabla de verdad de la conjunción***

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

De tal manea que podemos concluir que la conjunción es verdadera únicamente cuando las dos proposiciones simples son verdadera, en cualquier otro caso la conjunción es falsa.

Ejercicio Propuesto 3: Plantea el análisis de todos los casos y valores de verdad para el ejemplo 2:

Ejercicio propuesto	*Termino de escribir mi programa de computación y luego jugaré tenis*
CASO 1:	
CASO 2:	
CASO 3:	
CASO 4:	

1.8.2 La disyunción " v "

Sean **p** y **q** dos proposiciones simples. La proposición **p** o **q**, simbolizada "**p v q**" se llama disyunción de **p** y **q**.

Ejemplo 1: **Uso del "o" incluyente**

r v s: Juan estudia ingeniería o Paola estudia medicina

r : Juan estudia ingeniería
v : o
s: Paola estudia medicina

Ejemplo 2: **Uso del "o" excluyente**

x v y : Quieres helado o gaseosa.

x : Quieres helado.
v : o
y: Quieres gaseosa.

Ejemplo 3: **Uso del "o" excluyente**

p v q: Alexandra vive en Bogotá o en Barranquilla.

p : Alexandra vive en Bogotá.
v : o
q : Alexandra vive en Barranquilla.

Los ejemplos anteriores muestran los usos del operador "**o**". En el ejemplo 2 tenemos el llamado "o incluyente" el cual hace que el valor de verdad de una de las dos proposiciones simples repercuta en el valor verdadero de la proposición disyuntiva; mientras que el conectivo lógico "o" de los ejemplos 2 y 3 actúa como un "o excluyente", donde el valor de verdad de una proposición excluye la veracidad de la otra proposición, esto hace que la proposición disyuntiva siempre tome el valor verdadero.

Para establecer el valor de verdad de una proposición disyuntiva, consideremos las siguientes funciones proposicionales:

U = {personas que son Colombianas}
P(x) = x es una persona que vive en Bogotá
Q(x) = x es una persona que vive en Barranquilla

$p(x) \cup q(x)$ **x** es un Colombiano que vive en Bogotá **o** **x** es un Colombiano que vive en Barranquilla

$$P \cup Q = \{x / p(x) \vee q(x)\} = \{\text{todos los Colombianos que viven en Bogotá o en Barranquilla}\}$$

Por consiguiente el conjunto de verdad de la disyunción es exactamente la unión de los conjunto de verdad de sus componentes; su representación gráfica es la parte sombreada de la siguiente figura:

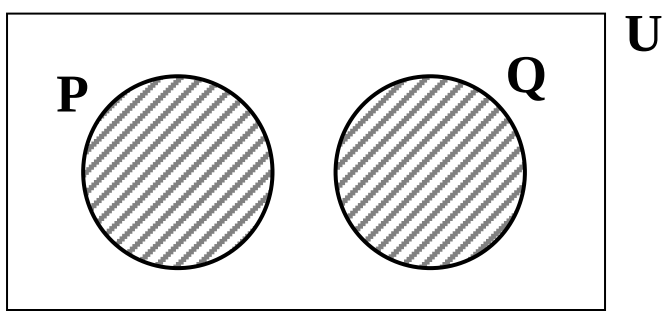


Figura No. 3 Disyunción

Como se analizó en la conjunción, el valor de verdad de la proposición compuesta no sólo depende del conectivo lógico, sino del valor de verdad de cada una de sus proposiciones simples. Por lo tanto, surgen las mismas cuatro posibilidades:

Caso 1:	Que **p** sea verdadera	y	**q** sea verdadera
Caso 2:	Que **p** sea verdadera	y	**q** sea falsa
Caso 3:	Que **p** sea falsa	y	**q** sea verdadera
Caso 4:	Que **p** sea falsa	y	**q** sea falsa

A continuación se analizan estas posibilidades para las siguientes dos proposiciones:

Sean : r: 2 es un número par
s: 5 es un número impar

Caso 1:	r:	Verdadera	2 es par
	s:	Verdadera	5 es impar
	$r \vee s$:	Verdadera (V)	2 es par o 5 es impar
Caso 2:	r:	Verdadera	2 es par
	s:	Falsa	5 es no es impar
	$r \vee s$:	Verdadera (V)	2 es par o 5 no es impar
Caso 3:	r:	Falsa	2 no es par
	s:	Verdadera	5 es impar
	$r \vee s$:	Verdadera (V)	2 no es par o 5 es impar
Caso 4:	r :	Falsa	2 no es par
	s:	Falsa	2 no es impar
	$r \vee s$:	Falsa (F)	2 no es par o 5 no es impar

De lo planteado en los casos anteriores podemos concluir que la tabla de verdad de la disyunción es:

Tabla No. 3 Tabla de vedad de la disyunción

p	q	$p \vee q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

Es decir, la disyunción es falsa solamente cuando las dos proposiciones simples son falsas. En los otros casos es verdadera.

Ejercicio Propuesto 4: Plantea ejemplos de premisas r y s asociados con tu programa de estudio, tal que te permitan verificar el valor de verdad de la proposición compuesta $r \vee s$. Usa como referencia los cuatro casos anteriores.

Premisas elegidas	*r* = *s*=
CASO 1:	
CASO 2:	
CASO 3:	
CASO 4:	

Mi conclusión:

1.8.3 La negación ~

Sea **p** una proposición simple. Se define la negación de **p** mediante la proposición compuesta **no p** simbolizada por: "**~ p**" o por "$\neg p$"

Ejemplo 1: p : 3 es un número entero primo.

$\neg p$: 3 no es un número entero primo, también se puede leer. es falso que 3 es un número entero primo.

Ejemplo 2: q : El automóvil de Francisco es rojo.

~ q: El automóvil de Francisco no es rojo ,o, es falso que el automóvil de Francisco es rojo.

Claramente se puede establecer que si una proposición es verdadera su negación es falsa y recíprocamente, si una proposición es falsa su negación es verdadera, por lo tanto la tabla de verdad de la negación es:

Tabla No. 4 Tabla de vedad de la negación

p	~p
V	F
F	V

La representación en diagramas de Venn de la negación es como sigue:

U = {personas que son Colombianas}, $p(x)$= x es una persona que no vive en Bogotá

$\neg p(x)$= x es una persona que no vive en Bogotá

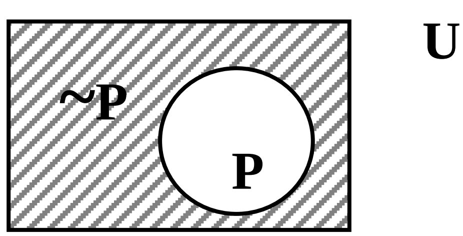


Figura No. 4 Negación

El área sombreada corresponde a la negación de P

Ejercicio Propuesto 5: Plantea cinco ejemplos de premisas asociados con tu programa de estudio, y su correspondiente negación. ¿Consideras que es necesario emplear siempre la palabra NO para negar una proposición?

Premisa	**Negación de la premisa**

Lección No.4 Conectivos lógicos Condicional y Bicondicional

1.8.4 El condicional "$\rightarrow$"

Se dice que una proposición compuesta es condicional, si esta formada por dos proposiciones simples enlazadas por la expresión **"si…entonces".**

Si **p** y **q** representan dos proposiciones, la expresión "si **p** entonces **q**" se simboliza así: $p \rightarrow q$ y se lee **p** implica **q**.

La proposición precedida por la expresión "si", se llama **antecedente o hipótesis** y la proposición precedida por la expresión "entonces", se llama **consecuente o conclusión** de la implicación. En la expresión $p \rightarrow q$, el antecedente es **p** y el consecuente es **q**.

Las proposiciones condicionales se pueden enunciar en nuestro lenguaje natural de diferentes maneras, algunas son:

- Si **p** entonces **q**
- **p** sólo si **q**
- **q** si **p**
- **p** es suficiente para **q**
- **q** es necesaria para **p**

Los siguientes ejemplos ilustran los anteriores enunciados:

- *Si un entero es múltiplo de 4 entonces es divisible por 2*
- *Apruebo el semestre sólo si estudio*
- *El algoritmo esta bien enunciado si el programa corre*
- *Si dos rectas nunca se cortan necesariamente son paralelas*
- *Si es conductista entonces reduce toda conducta humana a la relación estímulo-respuesta*

Ejercicio Propuesto 6: Elije una proposición condicional asociada con tu programa de estudio y plantea la misma expresión de diferentes formas sin cambiar su sentido.

Proposiciónes condicionales elegidas	
Manera 1	
Manera 2	
Manera 3	
Manera 4	
Manera 5	

¿Cómo determinar el valor de verdad de la proposición condicional?

Supongamos verdadera la siguiente proposición:

"Si es un día soleado entonces hace calor"

Sea **p**: *es un día soleado*
q: *hace calor*

Como lo analizamos en los casos anteriores, surgen cuatro posibilidades:

Caso 1: Es un día soleado y hace calor. En este caso el antecedente y el consecuente se cumplen. Por lo tanto la proposición compuesta $p \rightarrow q$ es verdadera.

Caso 2: Es un día soleado pero no hace calor. En este caso el antecedente se cumple pero no se cumple el consecuente. Por lo tanto la proposición compuesta $p \rightarrow q$ es falsa.

Caso 3: No es un día soleado pero a pesar de esto hace calor. En este caso encontramos que aunque el antecedente se cumple el consecuente no. No obstante esto no hace falsa la proposición compuesta original "Si es un día soleado entonces hace calor". Por lo tanto la proposición compuesta $p \rightarrow q$ es verdadera.

Caso 4: Es no es un día soleado y no hace calor. En este caso no se da el antecedente y no se cumple el consecuente. Por lo tanto la proposición compuesta $p \rightarrow q$ es verdadera.

De los casos planteados concluimos que la tabla de verdad para la implicación toma los siguientes valores:

Tabla No. 5 Tabla de vedad para el condicional

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1.8.5 El bicondicional "$\leftrightarrow$ "

Se denomina bicondicional a la proposición formada por dos proposiciones simples conectadas por la expresión **"sí y sólo sí"**.

Simbólicamente si **p** y **q** son proposiciones simples, la doble implicación $p \leftrightarrow q$ constituye un bicondicional, donde **p** recibe el nombre de primer miembro y **q** segundo miembro.

El bicondicional está formado por las implicaciones $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$, las cuales deben tener el mismo valor de verdad para formar una equivalencia entre **p** y **q**; en consecuencia, se dice que la proposición **p** es equivalente a la proposición **q** y se acostumbra a escribir $p \leftrightarrow q$.

La proposición bicondicional tiene varias formas de traducción más no de significación, veamos:

- **p** sí y sólo si **q**
- **q** sí y sólo si **p**
- si **p** entonces **q** y recíprocamente
- si **q** entonces **q** y recíprocamente
- **p** es una condición necesaria y suficiente para **q**
- **q** es una condición necesaria y suficiente para **p**

Ejercicio Propuesto 7: Construye una proposición bicondicional con dos premisas asociadas a tu programa de estudio, luego rescribe la proposición bicondicional sin cambiar su sentido. ¿Cuántas maneras diferentes de expresar la misma idea en leguaje natural encuentras?

Premisa 1: ____
Premisa 2: ____
Proposición bicondicional: ______________________________________
____

La misma proposición bicondicional expresada de otra manera:

____

A continuación un ejemplo con premisas asociadas a la geometría:

Ejemplo 1: Dadas las proposiciones atómicas:

p: Un triángulo es rectángulo
q: Un triángulo tiene un ángulo recto

El bicondicional $p \leftrightarrow q$ se puede traducir de las siguientes formas:

- Un triángulo es rectángulo sí y sólo sí tiene un ángulo recto.
- Un triángulo tiene un ángulo recto sí y sólo sí es un triángulo rectángulo
- Si un triángulo es rectángulo entonces tiene un ángulo recto y si un triángulo tiene un ángulo recto entonces es un triángulo rectángulo.
- Una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea rectángulo es que tenga un ángulo recto.
- Una condición necesaria y suficiente para que un triángulo tenga un ángulo recto es que sea un triángulo rectángulo.
- Un triángulo rectángulo es equivalente a un triángulo con un ángulo recto.

¿Cómo determinar el valor de verdad de la proposición bicondicional?

Supongamos verdadera la siguiente proposición:

"Si y sólo si es un día soleado entonces hace calor"

Sea **p**: *es un día soleado*
q: *hace calor*

Como lo analizamos en los ejemplos anteriores, surgen cuatro posibilidades:

Caso 1: Es un día soleado y hace calor. En este caso ambas proposiciones se cumplen. Por lo tanto la proposición compuesta $p \leftrightarrow q$ es verdadera.

Caso 2: Es un día soleado pero no hace calor. En este caso se cumple sólo una de las dos proposiciones simples, lo que de acuerdo con la expresión *"Si y sólo si es un día soleado entonces hace calor"* no debería darse. Por lo tanto tal proposición compuesta ($p \leftrightarrow q$) es falsa.

Caso 3: No es un día soleado pero hace calor. En este caso se cumple sólo una de las dos proposiciones simples, lo que de acuerdo con la expresión *"Si y sólo si es un día soleado entonces hace calor"* no debería darse. Por lo tanto tal proposición compuesta ($p \leftrightarrow q$) es falsa.

Caso 4: No es un día soleado y no hace calor. En este caso se cumple sólo una de las dos proposiciones simples, lo que no se contradice con la expresión *"Si y sólo si es un día soleado entonces hace calor"* . Por lo tanto la proposición compuesta ($p \leftrightarrow q$) es verdadera.

De los casos planteados concluimos que la tabla de verdad para la dobleimplicación toma los siguientes valores:

Tabla No. 6 Tabla de vedad para el condicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

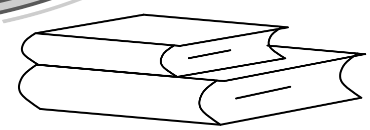
Así podemos concluir que el bicondicional es verdadero solamente cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Ejercicio Propuesto 8: De acuerdo a la definición estudiada para el bicondicional; para determinar los valores de verdad de la proposición bicondicional basta indagar por el valor de verdad de la conjunción entre las implicaciones $p \to q$ y $q \to p$. Se propone al estudiante hacer la demostración.

p	**q**	$p \to q$	$q \to p$	$(q \to p) \wedge (p \to q)$	$p \leftrightarrow q$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Mi conclusión:

RESUMEN 2



Proposición: Proposiciones con sentido completo cuyo valor es verdadero o falso, pero no ambos a la vez. Expresión lingüística con la propiedad de ser verdadera o falsa.

Las proposiciones se representan simbólicamente mediante las letras p, q, r, s, t.

Conectivos lógicos: Son términos que sirven para unir o enlazar proposiciones simples. Los conectivos lógicos fundamentales son:

Lenguaje Natural	Símbolo	Nombre
y	$\wedge$	Conjunción
o	$\vee$	Disyunción
no	$\neg$	Negación

Clases de proposiciones

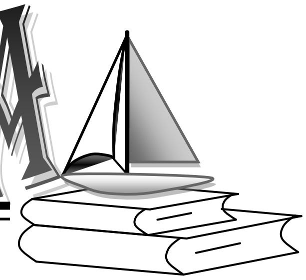
1. **Simples o atómicas:** oraciones con sentido completo que no utilizan conectivos lógicos.

2. **Compuestas o moleculares:** Se obtienen combinando dos o más proposiciones simples mediante la utilización de los conectivos lógicos. Unión de dos o más proposiciones simples mediante términos de enlace como **o**, **y**, **si…entonces**, **si y sólo si**. Su valor de verdad depende de los valores que tomen las proposiciones que la conforman.

3. Tablas de verdad para los conectivos lógicos:

Proposiciones		Negación		Conjunción	Disyunción	Condicional	Bicondicional
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	F	F	V	V

TRANSFERENCIA



“Todo conocimiento, habilidad, destreza o competencia puede permitir la transferencia de situaciones conocidas a desconocidas”. Es decir, a continuación desarrollaremos actividades que agregan valores de recontextualización y productividad a los conocimientos aprendidos y a las competencias desarrolladas en la fase de profundización. Salazar (2008).

Se trata de actividades que plantean la utilidad social del conocimiento mediante su aplicación en el contexto:

I. A continuación encontrarás diez proposiciones compuestas. Para cada proposición se debe identificar las proposiciones simples, los conectivos lógicos y finalmente expresar la proposición compuesta en lenguaje simbólico:

Ejemplo:

Proposición compuesta: *“Lograré aprender si estudio y practico”*

Proposiciones simples: ***p*** *= estudio*
q *= practico*
r *= aprendo*

Proposición compuesta identificando los conectivos lógicos:

*“**Si** estudio **y** practico, **entonces** aprendo”*

Antes de intentar expresar la proposición compuesta en lenguaje simbólico, es necesario identificar el antecedente y el consecuente del condicional, es decir, identificar cuál es la causa y cual el efecto.

En este caso el efecto es “aprender” y la causa “estudiar y practicar”, por lo tanto:

La proposición compuesta en lenguaje simbólico es: $(p \wedge q) \rightarrow r$

Obsérvese la necesidad de usar signos de agrupación para expresar correctamente el sentido de la proposición.

Ejercicio de transferencia propuesto:

Para las siguientes proposiciones compuestas identifiquemos las proposiciones simples, los conectivos lógicos y expresemos la proposición compuesta en lenguaje simbólico:

Proposiciones:

1. Sara no es estudiante de psicología
2. Si hoy es viernes, mañana es sábado
3. Si el medicamento contiene antipirético, quita la fiebre
4. Si el medicamento quita la fiebre, entonces es antipirético
5. Siempre y cuando trabaje, me pagan
6. Sandra estudia inglés pero Mateo estudia francés
7. Sandra estudian inglés o francés
8. Aunque Sandra estudia inglés, Mateo estudia francés
9. Sandra y Mateo estudian francés
10. Es mentiras que Ana estudia Inglés

II. En este ejercicio haremos uso de los diagramas de ***VEEN*** para deducir la representación para las siguientes proposiciones compuestas identificar las proposiciones simples, los conectivos lógicos y expresar la proposición compuesta en lenguaje simbólico:

Ejemplo:

U = {Colombianos}
P = {personas que juegan futbol}
Q = {personas que son de Santamarta}

Representar mediante diagramas de VENN el conjunto de personas que Juegan futbol y son Colombianas:

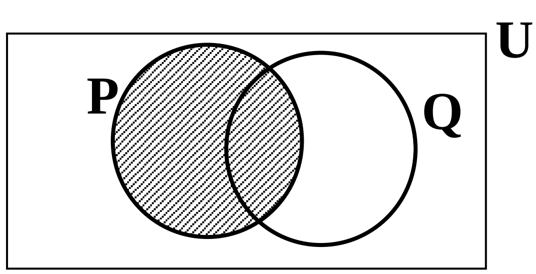


Figura No. 5 **Ejemplo – actividad de transferencia I -**

Ejercicio de transferencia propuesto:

Dados:

U = {Colombianos}
P = {personas que juegan fútbol}
Q = {personas que son de Santamarta}

Representar mediante diagramas de VENN las siguientes proposiciones:

1. Personas que Juegan fútbol y son Colombianas
2. Personas que Son de Santa Marta
3. Personas que son Colombianas
4. Personas que son Colombianas pero no juegan fútbol
5. Personas que son de Santa Marta pero no juegan fútbol
6. Personas que no son de Santa Marta
7. Personas que son de Santa Marta y juegan fútbol
8. Personas que son Colombianas o juegan fútbol
9. Personas que Juegan fútbol
10. Personas que son Colombianas pero no son de Santa Marta
11. Personas que son de Santa Marta o Juegan futbol

Una recomendación para el estudiante es partir de proponer elementos para cada conjunto, de tal manera que podamos representar los conjuntos propuestos por extensión:

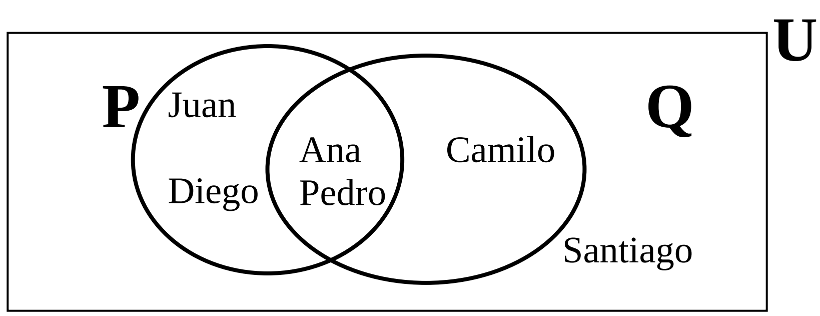


***Figura No. 6 Ejemplo* – actividad de transferencia II -**

Ejemplo:

Personas que Juegan fútbol y son Colombianas: $\{Juan, Diego, Ana, Pedro\}$

Lección No.5 Tablas de verdad

1.9 Tablas de Verdad

Una tabla de verdad es una representación esquemática de las relaciones entre proposiciones; sirve para determinar los valores de verdad de proposiciones compuestas, las cuales dependen de los conectivos utilizados y de los valores de verdad de sus proposiciones simples.

En la elaboración de una tabla de verdad los términos de enlace tales como la negación (" **~** "), la disyunción (" **v** ") y la conjunción (" **∧** ") se consideran conectivos fundamentales; por tal razón, sus valores de verdad constituyen la base para establecer bajo qué condiciones una proposición compuesta es verdadera o falsa.

Como lo aprendimos en la lección anterior, la siguiente tabla resume los valores de verdad de *los conectivos lógicos:*

Tabla No. 7 Valores de verdad de los conectivos lógicos

p	**q**	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	**V**	F	F	V	V	V	V
V	**F**	F	V	F	V	F	F
F	**V**	V	F	F	V	V	F
F	**F**	V	V	F	F	V	V

1.9.1 Construcción de Tablas de Verdad

Para determinar el valor de verdad de una proposición compuesta es necesario elaborar la correspondiente tabla de verdad; para tal fin y mediante el siguiente ejemplo se enuncian los pasos a seguir:

Ejemplo 1:

Construir la tabla de verdad para la proposición $\neg(p \wedge q)$

Paso 1: Identificar las proposiciones simples presentes en el razonamiento lógico:

$p,\ q$

Paso 2: De acuerdo al número total de proposiciones simples se determina la cantidad de combinaciones posibles entre los valores de verdad de las proposiciones simples:

El ejercicio propuesto tiene dos proposiciones simples **p** y **q,** luego, las combinaciones posibles de los valores de verdad serán:

que $p = V$ y que $q = F$

que $p = V$ y que $q = V$

que $p = F$ y que $q = V$

que $p = F$ y que $q = F$

Es decir que en el caso de tener **dos (2)** proposiciones simples, sólo hay **cuatro (4)** casos posibles:

p	q
V	F
V	V
F	V
F	F

¿Cuántos casos posibles tendremos para la proposición compuesta: $(p \wedge q) \vee q$?

Recordemos que el primer paso es identificar el número de proposiciones simples:

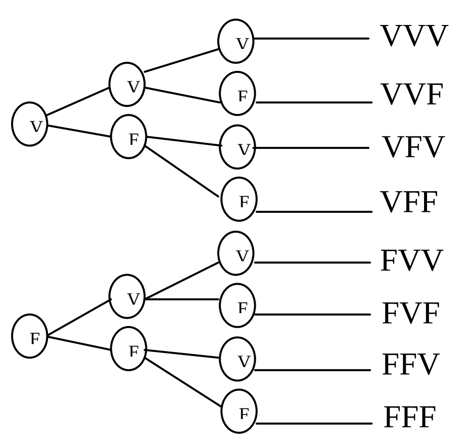
Una vez más, las proposiciones simples son dos (2): $p, \; q$ luego el número de casos posibles es también de cuatro (4): **FF**, **VF**, **VV**, y **FV**.

¿Cuántos casos posibles tendremos para la proposición compuesta: $(p \wedge q) \vee r$?

El primer paso será identificar el número de proposiciones simples:

$$p, \; q, \; \mathrm{r}$$

Si lo analizamos detenidamente, hay dos posibilidades para la **p** (V, F), también hay dos posibilidades para la **q** (V, F) y dos posibilidades para la **r** (V, F):



Luego, el número de combinaciones posibles será de: 2 x 2 x 2 = 2^3 = 8

Esta conclusión nos permite encontrar una formula para calcular el número de combinaciones posibles de acuerdo al número de ***variables lógicas*** o ***letras proposicionales*** involucradas en la ***fórmula proposicional***:

$$2^n$$

NOTA: Más adelante, en el curso de probabilidad aprenderás que este es un caso de combinación denominado permutaciones con repetición.

De esta manera, una función lógica con 4 letras proposicionales tendrá **16** casos posibles, una función lógica con 5 letras proposicionales tendrá **32** casos posibles, una función lógica con 6 letras proposicionales tendrá **64,** una función lógica con 7 letras proposicionales tendrá **128,** una función lógica con 8 letras proposicionales tendrá **256,** una función lógica con 9 letras proposicionales tendrá **512….**

¿Te parecen conocidos estos números? Búscalos en el mundo de la computación

Aunque lo determinante en el análisis de la tabla de verdad es que se encuentren todas las combinaciones posibles y no el orden en que éstas sean analizadas, el **orden** es un factor determinante para evitar casos repetidos en el momento de construir la tabla de verdad.

Una convención es iniciar por el caso en que todas las proposiciones simples sean verdaderas, terminando con el caso en el que todas las proposiciones simples son falsas:

Para lograrlo, en la primera columna de izquierda a derecha iniciamos por asignar grupos de $2^n/2$ valores de verdad iguales consecutivos, en la segunda columna asignamos grupos de $2^n/4$ valores de verdad iguales consecutivos, en la tercera columna asignamos grupos de $2^n/8$ valores de verdad iguales consecutivos hasta obtener en la última columna valores de verdad intercalados.

De esta manera, para **n=3** asignaremos grupos de 4 valores de verdad (8/2) valores de verdad iguales para la primera columna, la mitad de este valor (2) para la segunda e intercalados (1) para la tercera:

Veamos:

p	q	r
V	V	V
V	V	**F**
V	**F**	V
V	**F**	**F**
F	V	V
F	V	**F**
F	**F**	V
F	**F**	**F**

Igualmente, para construir una tabla de verdad de 4 proposiciones simples partimos asignado 8 valores ***verdaderos*** y 8 ***falsos***, para la segunda columna asignaremos de a 4 valores de verdad, para la tercera de a 2 y para la cuarta columna de a 1.

Sin importar de que formula proposicional se trate, si el número de proposiciones simples es igual, la combinación de los posibles casos de verdad en la tabla es siempre el mismo.

Paso 3: Se hace un recorrido desde adentro hacia afuera de acuerdo a los signos de agrupación:

.

Los signos de agrupación que encontraremos en una fórmula proposicional sigue el orden:

$$\left\{ \left[\left(\left\{ \left[(....) \right] \right\} \right) \right] \right\}..$$

Paso 4: Se identifica el conectivo que aparece dentro del paréntesis, en este ejemplo propuesto $\neg\left(p \wedge q\right)$ es la conjunción.

Paso 5: Se precisa el término de enlace que precede al paréntesis, en el ejemplo la negación.

Paso 6: Se elabora la tabla con el número de columnas determinado por:

- ✓ Proposiciones que intervienen:
- ✓ Conectivos utilizados dentro del paréntesis
- ✓ Conectivo utilizado fuera del paréntesis

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V		
V	**F**		
F	V		
F	**F**		

Paso 7: Se completa la tabla por columnas, teniendo en cuenta el conectivo y el valor de verdad de cada proposición simple:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

De esta manera, sin importar el tamaño de la proposición compuesta, siempre estaremos analizando el valor de verdad para un solo conectivo lógico en cada columna.

Ejemplo 2:

Elaborar la tabla de verdad de la proposición: $(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$

Al realizar la fórmula proposicional encontramos que la tabla de verdad tendrá cuatro (4) casos posibles, posteriormente, se observa que la proposición está conformada por dos paréntesis conectados por la disyunción. De manera que debemos encontrar los valores de verdad del paréntesis $p \vee q$ y del paréntesis $p \wedge q$, siguiendo el recorrido de adentro de los paréntesis hacia afuera.

Finalmente, haremos la conjunción entre los paréntesis: $(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$

Luego de éste análisis procedemos a elaborar la tabla de verdad:

p	**q**	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	F

Ejemplo 3:

Elaborar la tabla de verdad de la proposición: $q \to p$

Al realizar la fórmula proposicional encontramos que la tabla de verdad tendrá cuatro (4) casos posibles, siguiendo los pasos para la construcción de tablas de verdad se obtiene

p	**q**	$p \to q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Ejemplo 4:

Elaborar la tabla de verdad de la proposición: $(p \wedge q) \to r$

Al realizar la fórmula proposicional encontramos que la tabla de verdad tendrá ocho (8) casos posibles, posteriormente, se observa que la proposición está conformada por un paréntesis conectado por un condicional. De manera que debemos encontrar los valores de verdad del paréntesis $p \wedge q$ y de la proposición r, siguiendo el recorrido de adentro de los paréntesis hacia afuera.

Finalmente, resolveremos para el conectivo principal:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Ejercicio Propuesto 9: Determinar los posibles valores de verdad para las proposiciones:

1) $p \wedge \neg q$, **2)** $\neg p \wedge \neg q$, **3)** $p \rightarrow \neg q$ **4)** $p \vee p$

5) $\neg(p \wedge \neg q)$, **6)** $\neg[(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \vee q)]$, **7)** $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$

1)

p	q		

2)

p	q			

3)

p	q		

4)

p	p	

5)

p	q			

6)

p	q						

Desarrolla en este espacio el numeral 7:

p	q	r	s			

CAPÍTULO 2

2 Capítulo: Tautología

Objetivo general

- El propósito de este capítulo es brindar al estudiante elementos para la clasificación de una proposición como tautológica.

Objetivos específicos

- Identificar tautologías
- Determinar si dos proposiciones son equivalentes
- Dada una proposición identificar la proposición contraria, recíproca y contrarrecíproca
- Diferenciar y aplicar las leyes del algebra de proposiciones

Lección No.6 Tautologías

2.1 Tautología

Entre las proposiciones compuestas existen unas muy importantes por ser siempre verdaderas independientemente del valor de verdad de las proposiciones que la conforman; este tipo de proposiciones reciben el nombre de tautologías.

En otras palabras, se dice que una tautología es una función lógica que es verdadera para todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de sus premisas.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1:

Demostrar que la proposición $(p \wedge q) \rightarrow p$ es una tautología, para demostrarlo, debemos construir la tabla de verdad y verificar que efectivamente la función lógica es verdadera para todos los casos:

p	**q**	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Queda demostrado que $(p \wedge q) \rightarrow p$ es una proposición que sin importar el valor de sus premisas **p** y **q**, es siempre verdadera.

Ejemplo 2:

Demostrar que la proposición $\left[\left(p\vee q\right)\wedge\neg p\right]\to q$ es una tautología, para demostrarlo, debemos construir la tabla de verdad y verificar que efectivamente la función lógica es verdadera para todos los casos:

p	**q**	$p\vee q$	$\neg p$	$\left(p\vee q\right)\wedge\neg p$	$\left[\left(p\vee q\right)\wedge\neg p\right]\to q$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

Queda demostrado que $\left[\left(p\vee q\right)\wedge\neg p\right]\to q$ es una proposición que sin importar el valor de sus premisas p y q, es siempre verdadera.

Una proposición compuesta, que es falsa en todos los casos independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la conforman se llama **Contradicción.**

Ejercicio Propuesto 10: Demostrar que la proposición $\left[\left(p\to q\right)\wedge\left(q\to r\right)\right]\to\left(p\to r\right)$ es una tautología:

p q r	$p\to q$	$q\to r$	$p\to r$	$\left(p\to q\right)\wedge\left(q\to r\right)$	$\left[\left(p\to q\right)\wedge\left(q\to r\right)\right]\to\left(p\to r\right)$
V V V					
V V F					
V F V					
V F F					
F V V					
F V F					
F F V					
F F F					

Lección No.7 Proposiciones equivalentes

2.2 Proposiciones equivalentes

Las tautologías permiten estructurar métodos de demostración que son ampliamente utilizados en el campo de la lógica. De ahí la importancia de familiarizarse con el simbolismo manejado y su correspondiente aplicación.

Dos proposiciones compuestas se consideran lógicamente equivalentes, si tienen los mismos valores de verdad para cada caso en su tabla de verdad.

Ejemplo 1:

Demostrar que las proposiciones $p \to q$ y la proposición $\neg p \vee q$ son lógicamente equivalentes:

Tabla de verdad de la proposición $p \to q$:

p	**q**	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla de verdad de la proposición $\neg p \vee q$:

p	**q**	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Simbólicamente, podemos determinar que dos proposiciones son lógicamente equivalentes Sí y sólo si: $proposición\_1 \leftrightarrow proposición\_2$ es una tautología:

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

A continuación estudiaremos algunas equivalencias importantes. Estas equivalencias también son conocidas como leyes de la lógica.

Ejercicio Propuesto 11: Demostrar que la proposición $(p \to q) \wedge (q \to r)$ y la proposición $p \to r$ són lógicamente equivalentes:

Ejercicio Propuesto 12: Demostrar que las proposiciones $p \to q$ y la proposición $\neg p \vee q$ son lógicamente equivalentes:

Lección No.8 Tautología trivial y doble negación

2.2.1 Tautología trivial

Esta tautología establece que cualquier proposición es equivalente así misma, esto es $p \leftrightarrow p$. Veamos la tabla de verdad correspondiente:

p	$p \leftrightarrow p$
V	**V**
F	**V**

2.2.2 Doble Negación

Demostraremos que las proposiciones p y la proposición $\neg(\neg p)$ son lógicamente equivalentes. Para lograrlo construiremos la tabla de verdad de la proposición $p \leftrightarrow \neg(\neg p)$

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$	$p \leftrightarrow \neg(\neg p)$
V	F	V	**V**
F	V	F	**V**

Este resultado permite concluir que la doble negación de una proposición es la misma proposición.

Ejemplo 1:

Consideremos la proposición simple:

p : es de día,

luego:

$\neg p$: es de noche

$\neg(\neg p)$: no es de noche

Por lo tanto $\neg(\neg p) = p$

Ejemplo 2:

Consideremos la proposición simple:

p : el acusado es inocente

luego:

$\neg p$: es culpable

$\neg(\neg p)$: el acusado no es culpable

Por lo tanto $\neg(\neg p) = p$

Lección No.9 Implicación directa, contraria, recíproca y contrarecíproca

2.3 Implicación directa, contraria, recíproca y contrarecíproca

Existen varias formas de enunciar proposiciones condicionales así:

Implicación directa: $p \to q$
Implicación contraria: $\neg p \to (\neg q)$
Implicación recíproca: $q \to p$
Implicación contrarrecíproca: $\neg q \to (\neg p)$

Ejemplo 3:

Dadas las proposiciones **p**: Es un animal mamífero
q: Tiene pelo
entonces:

Implicación directa: Si es mamífero entonces tiene pelo
Implicación contraria: Si no es mamífero entonces no tiene pelo
Implicación recíproca: Si tiene pelo entonces es mamífero
Implicación contrarrecíproca: Si no tiene pelo entonces no es mamífero

Ejemplo 4:

Teniendo en cuenta la proposición directa: $\neg p \to q$ construir las otras formas de la implicación:

Implicación directa: $\neg p \to q$
Implicación contraria: $p \to (\neg q)$
Implicación recíproca: $q \to \neg p$
Implicación contrarrecíproca: $\neg q \to p$

Tabla de verdad para las cuatro formas de la implicación,

p	q	~ p	~ q	Directa	Recíproca	Contraria o Inversa	Contrarrecíproca o contraposición
				$p \to q$	$q \to p$	$\neg p \to (\neg q)$	$\neg q \to (\neg p)$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V

Tabla No. 6. Formas de la implicación.

¿Cuáles funciones equivalentes identificas en la tabla anterior?

Muy bien, al analizar los valores de verdad correspondientes a las columnas de la directa y la contrarecíproca observamos que éstas coinciden, al igual que los de las columnas de la contraria y de la recíproca, por lo tanto estas implicaciones son equivalentes.

Ejercicio Propuesto 13: Haciendo uso de la doble implicación, 1. Demostrar la equivalencia de las proposiciones directa y contrarrecíproca. Y 2. Demostrar la equivalencia de las proposiciones recíproca y contraria.

Lección No.10 Leyes de la lógica

2.4 Leyes del algebra de proposiciones

1. Idempotencia:

$$(p \vee q) \leftrightarrow p$$
$$(p \wedge q) \leftrightarrow p$$

3. Asociativas:

$$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

4. Conmutativas:

$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$$
$$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$$

5. Distributivas:

$$p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
$$p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

6. Identidad:

$$(p \vee 0) \leftrightarrow p, \ (p \vee 1) \leftrightarrow 1$$
$$(p \wedge 0) \leftrightarrow 0, \ (p \wedge 1) \leftrightarrow 1$$

7. Complemento:

$$(p \vee \neg p) \leftrightarrow 1, \ (p \wedge \neg p) \leftrightarrow 0$$
$$\neg p(\neg p) \leftrightarrow p, \ \neg 1 \leftrightarrow 0, \ \neg 0 \leftrightarrow 1$$

8. Leyes D' Morgan:

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$
$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

Estas leyes están formuladas por pares debido a la naturaleza dual del álgebra de proposiciones.

..

CAPÍTULO 3

3 Capítulo: Cuantificadores y proposiciones categóricas

Objetivo general

- El propósito de este capítulo es brindar al estudiante elementos para usar los cuantificadores universal y existencial en la construcción y representación de proposiciones categóricas, elementos fundamentales en la construcción de silogismos categóricos.

Objetivos específicos

- Identificar y clasificar las proposiciones categóricas de un argumento
- Diferenciar la cualidad y cantidad de una proposición categórica en forma estándar
- Establecer el tipo de oposición que se puede presentar entre dos proposiciones categóricas
- Representar gráficamente proposiciones categóricas de forma estándar

Lección No.11 Cuantificadores

3.1 Cuantificadores

3.1.1 Cuantificador universal y existencial

Existen especialmente en matemáticas, expresiones que contienen variables tales como x, y, z, etc., para las cuales su valor de verdad depende del valor que tome la variable.

Ejemplo $x + 1 = 2$

Esta proposición es verdadera si $\mathbf{x = 1}$ y falsa si $\mathbf{x \neq 1}$. A estas proposiciones se les llama **"Proposiciones abiertas"**.

Hasta el momento se han tratado proposiciones a las cuales se les puede asignar un valor de verdad, ya sea falso o verdadero, ahora en esta sección, se estudia la lógica de proposiciones abiertas, para ello, se asigna una expresión llamada **cuantificador,** que permite restringir los valores de las variables, de tal forma que la proposición toma un solo valor de verdad para dicha restricción.

En el ejemplo, la proposición se puede enunciar de las siguientes formas:

1. Existe $\mathbf{x = 1}$ tal que $\mathbf{x + 1 = 2}$. Proposición verdadera
2. Para todo $\mathbf{x \neq 1}$**,** se tiene que $\mathbf{x + 1 = 2}$. Proposición falsa

$(\exists x = 1) / (x + 1 = 2)$	Verdadera.
$(\forall x \neq 1) / (x + 1 = 2)$	Falsa.

Simbólicamente, en el primer caso el cuantificador recibe el nombre de **cuantificador existencial**, pues está informando que existe un sólo valor para **x** que hace verdadera la proposición dada, mientras que en el segundo caso el cuantificador se llama **universal** porque afirma que todos los valores de **x** diferentes de **1** hacen la proposición falsa, es decir, que un valor de **x** diferente de **1** convierte $\mathbf{x + 1 = 2}$ en proposición falsa.

Cualquier cuantificador de la forma para todo, todo, para cada, o cada se llama cuantificador universal y se simboliza por **"∀ "**

Ejemplo

(∀ x) / (x + 4 = 4 + x). Significa que todo **x** verifica la ecuación

La palabra algunos(s) significa que por lo menos uno verifica la condición. Los cuantificadores de la forma existe por lo menos uno, y se llaman cuantificadores existenciales y se representan así**: "∃".**

Ejemplo

(∃ x) / (2 x + 2 = 5)

Valores de verdad de expresiones con cuantificadores

Para determinar el valor de verdad de una expresión que contiene un cuantificador es importante tener claros los siguientes conceptos:

1. Conjunto Universal: es el conjunto que contiene todos los elementos considerados en un estudio determinado.
2. Conjunto dominio de la variable: corresponde al conjunto de valores posibles de la variable.

Ejemplo

(∀x Є R) / (2 x – 1 = 0) que se lee " para todo x que pertenece a los reales se verifica que **2 x – 1 = 0** ".
En esta proposición el conjunto universal esta formado por los números reales y el dominio de la variable es **x = ½.**
El ejemplo afirma que **todo** número real verifica **2x – 1 = 0**, lo cual es falso, pero si se cambia el conjunto universal, por el conjunto **{ 1/2 },** la proposición se convierte en verdadera y se enuncia así:

(∀ x Є { 1/2 }) / (2 x – 1 = 0) es verdadera.

Lo anterior conduce a la siguiente afirmación:
Una proposición que contiene un cuantificador universal es verdadera sí y sólo sí el dominio de la variable es igual al conjunto universal.

Ejemplo

$$(\exists x \in R) \ / \ (x^2 - 1 = 0)$$

Conjunto universal: **R** (reales)
Dominio de la variable: **x = 1 ,v, x = -1**
En este caso el cuantificador existencial afirma que por lo menos existe un valor que satisface la proposición, así, el ejemplo 2 es verdadero.

Ejemplo

$$(\exists x \in R) (x^2 + 1 = 0)$$

El conjunto universal está formado por los números reales, pero el dominio de la variable es el conjunto vacío, pues, no hay un número real que al elevarlo al cuadrado y sumarle 1 de cómo resultado cero, esto hace que la proposición sea falsa. Del análisis de los ejemplos 2 y 3 se puede afirmar: Una proposición con un cuantificador existencial es verdadera si y sólo si el dominio de la variable no es vacío.

Lección No.12 Proposiciones categóricas

3.2 Proposiciones categóricas

Como lo aprendimos en la segunda lección, la proposición lógica constituye el elemento fundamental de la lógica. En esta sección profundizaremos en los diferentes tipos de proposiciones categóricas y en su representación gráfica.

Una proposición categórica hace referencia a enunciados dobles, y son la base para que tenga lugar la formación de los Silogismos Categóricos, los cuales serán estudiaremos en la segunda unidad, en donde un enunciado (C) se sigue necesariamente de otros dos enunciados o Proposiciones Categóricas (A-B)

Así es como, el estudio clásico o aristotélico de la deducción está centrado en argumentos que contienen solamente proposiciones de un tipo especial, llamadas **proposiciones categóricas**.

El tipo especial se refiere a que las proposiciones pueden ser

universales (afirmativas o negativas) o

particulares (afirmativas o negativas)

Por lo tanto, se puede afirmar que hay cuatro formas estándar de proposiciones categóricas:

Proposición Categórica Universal afirmativa
Proposición Categórica Universal negativa
Proposiciones categóricas afirmativa particular
Proposiciones categóricas Negativa particular

A continuación analizaremos esta clasificación:

3.2.1 Cualidad y cantidad de las proposiciones categóricas

Cada proposición categórica de forma estándar tiene una **cualidad** y una **cantidad.**

3.2.1.1 Cualidad Afirmativa o Negativa

La cualidad de una proposición es afirmativa o negativa, según el sujeto, completa o parcialmente, afirme o niegue la inclusión de la clase. Por lo tanto las proposiciones afirmativas universales y particulares tienen cualidad afirmativa, en cambio las proposiciones negativas universales y particulares tienen cualidad negativa.

3.2.1.2 Cantidad Universal o Particular de cantidad

La cantidad de una proposición es universal o particular según que la proposición se refiera a todos los miembros o solamente a algunos de la clase designada por el término sujeto. Así, las proposiciones universales afirmativas o negativas son universales de cantidad y las proposiciones particulares afirmativas o negativas son particulares de cantidad.

Ejercicio Propuesto 14:

De la lectura anterior, y puedes completar la siguiente tabla:

Proposición Categórica	Representación
	Todo S es P
Particular Negativa	

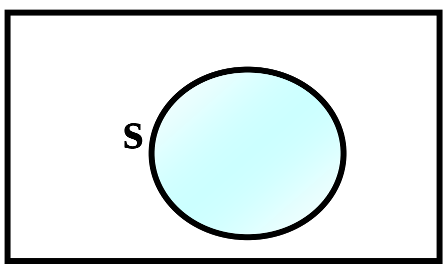
Lección No.13 Representación de las proposiciones categóricas

3.3 Simbología y diagramas para proposiciones categóricas

Como la interpretación de las proposiciones categóricas depende fundamentalmente de la noción de una **clase vacía**, se utiliza el cero **(0)** para representar este hecho y para simbolizar que la clase determinada por **S** no tiene miembros, se utiliza la ecuación **S = 0**.

Cuando se afirma que la clase **S si tiene elementos**, equivale a negar que **S** es vacía, por lo tanto su representación simbólica es $\mathbf{S \neq 0}$.

Las proposiciones categóricas se pueden representar gráficamente diagramando las clases a las que pertenecen, de tal forma que el diagrama es de una clase, no de una proposición, para realizar esta representación se utiliza un círculo marcado con el término que designa la clase, por ejemplo la clase **S** sé grafica así:



Clase S

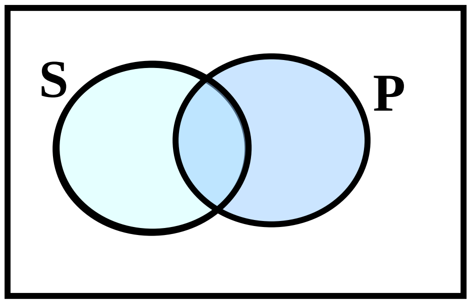
Para diagramar la proposición de que **S** no tiene miembros, o de que no hay **S**, se sombrea todo el círculo que representa **S**, lo cual indica que no contiene nada, que es vacía, y, para graficar la proposición que existen **S**, que se interpreta en el sentido de que hay por lo menos un miembro de la clase **S**, se coloca una **x** en cualquier parte en el interior del círculo que representa a **S**, lo cual indica que sí hay algo dentro de él, que no está vacío.

A continuación se representa gráficamente las proposiciones "**No hay S" y "Hay S**".

Se puede observar que el círculo que representa la clase **S** también representará la clase de su complemento, $\overline{\mathbf{S}}$, es decir, si en el interior del círculo se representa a todos los miembros de **S**, entonces, su exterior representará todos los miembros que no están en **S**, por lo tanto están en **$\bar{S}$.**

Representación de una proposición categórica:

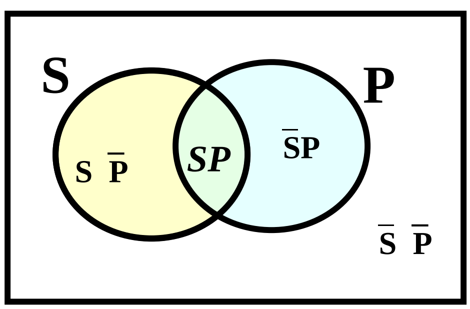
Para representar una proposición categórica en forma estándar se necesitan dos círculos intersecados. Si **S y P** representan los sujetos y predicados de la proposición, entonces su representación es:



clases S y P

La figura representa las dos clases **S** y **P**, pero no diagrama alguna proposición de ellas, no afirma ni niega que una de las dos o las dos clases tengan miembros. La parte del círculo **S** que esta fuera de **P** representa todos los **S** que no son **P**, lo cual se identificará como el producto de las clases **S** y **$\bar{P}$** (**S $\bar{P}$**); la parte común de los dos círculos representa la intersección o producto de las dos clases **SP**; la parte del círculo **P** que esta fuera de **S** representa a todos los **P** que no están en **S** (por lo tanto están en **$\bar{S}$**), es decir, el producto **$\bar{S}$P**, y la parte externa a los dos círculos representa todas las proposiciones que no están en **S** ni en **P**, lo cual corresponde a la cuarta clase **$\bar{S}$ $\bar{P}$**.

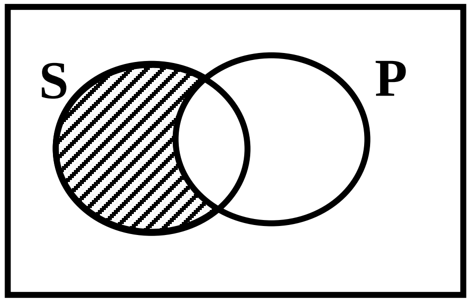
Lo anterior permite representar la figura No. 3 de la siguiente manera:



Clases S y P

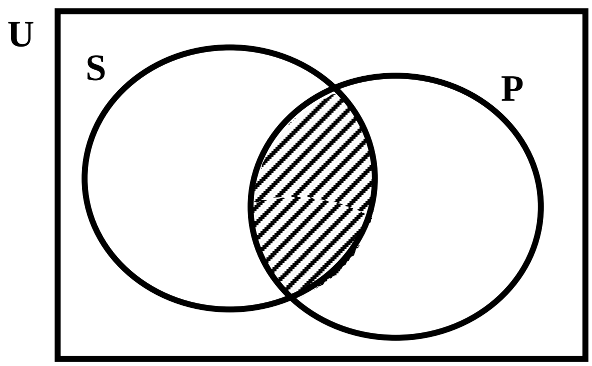
Para representar las cuatro proposiciones categóricas de forma estándar se sombrea o se inserta **x** en varias partes de la gráfica, a continuación se presenta cada uno de los casos:

Todo S es P, simbolizada por **$S\ \bar{P} = 0$**, su representación gráfica es:



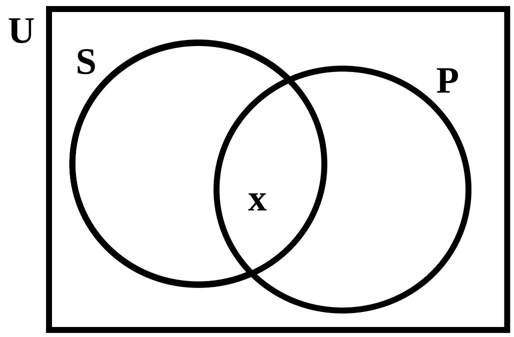
$S\ \bar{P} = 0$

Ningún S es P, o, Ningún P es S simbolizadas por SP = 0 y PS = 0, respectivamente, la representación gráfica en ambos casos es:



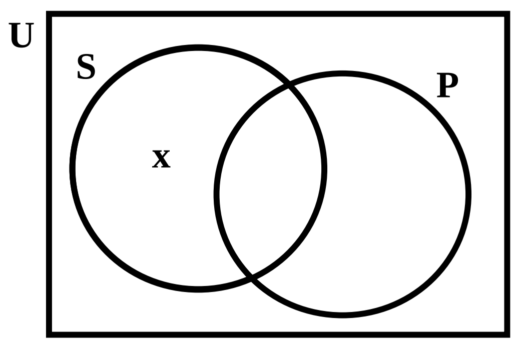
Ningún S es P, o,
Ningún P es S
SP = 0 ∨ **PS = 0**.

Algún S es P, simbolizada por $SP \neq 0$, su representación gráfica es:



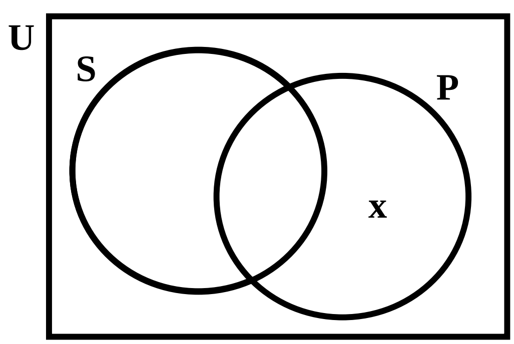
Algún S es P o
Algún P es S
$SP \neq 0$; $PS \neq 0$;

Algún S no es P, simbolizada por **$S\bar{P} \neq 0$,** su representación gráfica es:



Algún S no es P
$S\bar{P} \neq 0$

En el caso **Algún P no es S**, simbolizada por **$P\bar{S} \neq 0$**, su representación gráfica es:



Algún P no es S
$P\bar{S} \neq 0$

Las siguientes son algunas observaciones acerca de las representaciones gráficas realizadas:

1. El diagrama simple de los dos círculos, sin otro tipo de marcas o indicaciones, representa clases pero no representa ninguna proposición.

2. Un espacio en blanco a la izquierda no significa nada (ni que una clase tiene o no tiene miembros).

3. Las proposiciones sólo las representan aquellos diagramas en los que una parte ha sido sombreada o en la que se ha insertado una **x**.

4. Los diagramas de Venn constituyen una representación de las proposiciones categóricas en forma estándar, en las cuales las inclusiones y exclusiones espaciales corresponden a inclusiones y exclusiones no espaciales de clases.

5. Proporcionan un método claro de notación y se constituyen en la base del método más simple y directo para probar la validez de los silogismos categóricos (Ver siguiente capítulo).

Lección No.14 Clasificación de las proposiciones categóricas

3.3.1 Clasificación de las proposiciones categóricas

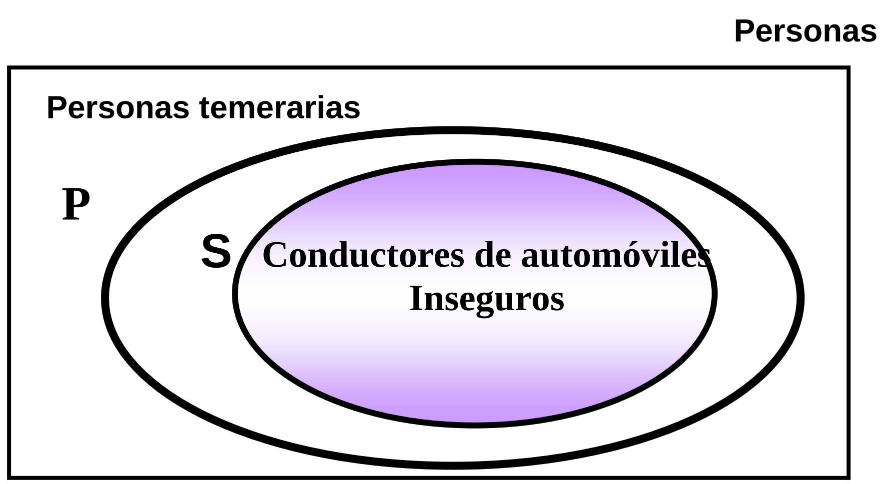
3.3.1.1 Proposición Categórica Universal afirmativa

Todos los conductores de automóviles que no son seguros son personas temerarias que ponen en peligro la vida de los demás.

Esta es una proposición universal afirmativa. Se refiere a dos clases:

1. **Conductores de automóviles inseguros y**
2. **Personas temerarias que ponen en peligro la vida de los demás**

y dice que la primera clase está contenida en la segunda, lo cual significa que cada miembro de la primera clase es también miembro de la segunda.



Todo S es P

En este ejemplo, el término sujeto **conductores**, designa a la clase de todos los conductores y el término predicado **temerarias**, designa a la clase de todas las personas temerarias.

Este tipo de proposición categórica se llama universal afirmativa, porque la proposición afirma que la relación de inclusión entre las dos clases es completa, todos los elementos o miembros de **S** también lo son de **P**.

Todas las proposiciones universales afirmativas se pueden escribir simbólicamente así:

Todo S es P , donde **S** representa el sujeto y **P** el predicado.

3.3.1.2 Proposición Categórica Universal negativa

Ningún conductor de automóvil responsable es un peligro para la vida de los demás.

Esta es una proposición universal negativa. Niega (en forma universal) que los conductores responsables son un peligro para la vida de los demás.

En este caso se hace referencia a dos clases:

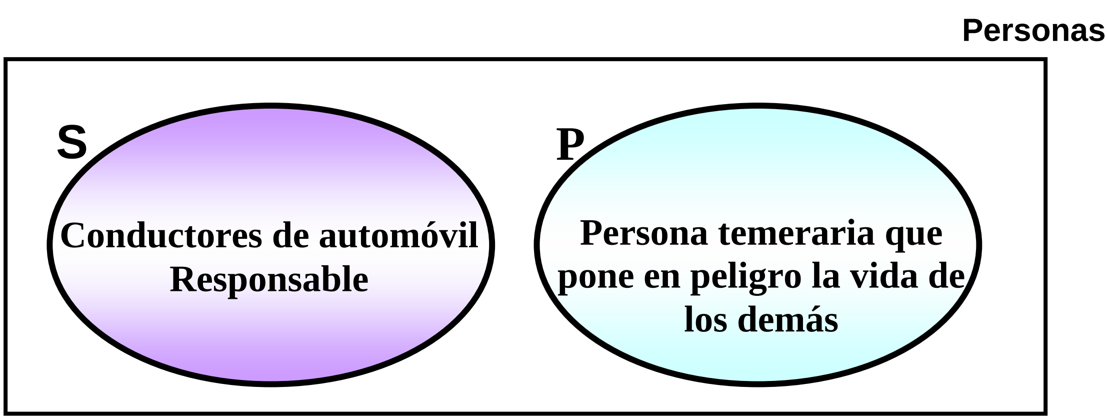
1. **Conductor de automóvil responsable y**

2. **personas que ponen en peligro la vida de los demás**

La primera clase excluye a la segunda, la excluye totalmente, es decir, que no hay ningún miembro de la primera clase (conductor responsable) que también pertenezca a la segunda (que represente un peligro para la vida de los demás). Todas las proposiciones universales negativas se pueden escribir así:

Ningún S es P

Donde S representa el término sujeto y P el término predicado.



Ningún S es P

La proposición recibe el nombre **universal negativo,** porque la proposición niega que la relación de inclusión de clase tenga lugar entre las dos clases y lo niega en forma universal: no hay ningún miembro de **S** que también lo sea de **P**.

3.3.1.3 Proposiciones categóricas afirmativa particular

Algunos estudiantes de la secundaria ingresan a la educación superior.

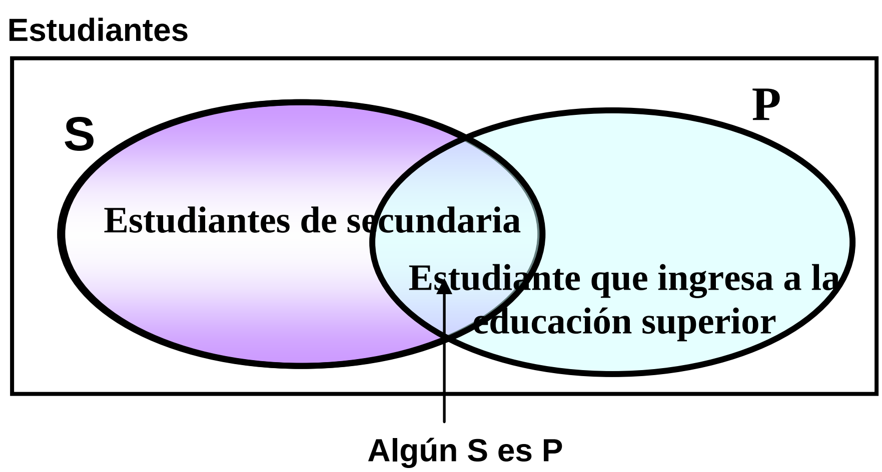
Este ejemplo afirma que algunos de los miembros de la clase de todos los estudiantes de secundaria son (ingresan) miembros de la clase de estudiantes de universidad. Pero no afirma esto universalmente: no dice que todos los estudiantes de secundaria (sin excepción) ingresan a la universidad, sino más bien algunos en particular. Esta proposición no afirma ni niega que "todos" los estudiantes ingresan a la universidad, se refiere sólo a algunos.

Clases:

1. **Estudiantes de secundaria y**

2. **Estudiantes que ingresan a la educación superior**

La palabra "algunos" es indefinida, significa ¿" al menos uno "?, ¿" al menos dos"?, ¿"al menos tres"? O ¿"al menos cuántos"? Para mayor precisión, se acostumbra usar éste término como "al menos uno ". Por lo tanto una proposición afirmativa particular se escribe simbólicamente así:



Algún S es P,
Lo cual significa que por lo menos un miembro de la clase designada con el término sujeto **S** también es miembro de la clase designada por el término predicado **P**. El nombre **afirmativa particular** hace referencia a que la proposición afirmativa se cumple en la relación de inclusión entre clases, pero no lo afirma de la primera clase universalmente, sólo parcialmente, de algunos miembros particulares de la primera clase.

3.3.1.4 Proposiciones categóricas Negativa particular

Algunos números reales no son positivos.

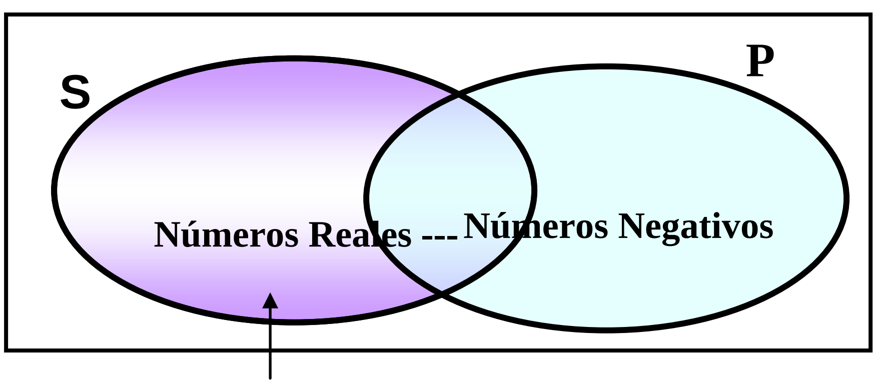
Clases

1. **Números reales y**

2. **Números negativos**

En este ejemplo el antecedente (algunos números reales) es particular en el sentido que no se refiere universalmente a los números reales, sólo a algunos de ellos, algunos miembros de esa clase. Pero a diferencia del ejemplo anterior, no afirma que los miembros particulares de la primera clase a los que se refiere (números reales) están incluidos en la segunda clase (reales no positivos), esto es precisamente lo que se niega. Una proposición particular negativa, se escribe en forma simbólica así:

Números



Algún S no es P

Algún S no es P. dice que por lo menos un miembro que pertenece a la clase designada por el término sujeto, **S**, es excluido de la totalidad de la clase designada por el término predicado, **P**.

3.4 Proposiciones contrarias, de contingenica y subcontrarias

Las proposiciones categóricas en forma estándar que tienen el mismo término sujeto y término predicado, pueden diferir unas de otras en cualidad o en cantidad o en ambas

Existen ciertas relaciones importantes correlacionadas con los diversos tipos de oposición (diferencia en cualidad, cantidad o en ambas) éstas pueden ser de CONTRADICCIÓN, CONTINGENCIA, o, SUBCONTRARIAS

3.4.1 Proposiciones contradictorias

Dos proposiciones son CONTRADICTORIAS si una de ellas es la negación de la otra, es decir, las dos proposiciones no pueden ser a la vez verdaderas ni a la vez falsas. Es claro que dos proposiciones categóricas en forma estándar que tienen el mismo término sujeto y término predicado, pero son diferentes tanto en cantidad como en cualidad, son contradictorias entre sí.

Ejemplo 1

Las proposiciones

P: todos los jueces son abogados
Q: algunos jueces no son abogados

Son contradictorias porque **son opuestas tanto en cantidad como en cualidad.** La proposición **P** es universal afirmativa, mientras que la proposición **Q** es particular negativa.

Ejemplo 2

Las siguientes proposiciones también son contradictorias.

P: algunos números reales son negativos. Es particular afirmativa
Q: todos los números reales son negativos. Es universal negativa.

En este caso son opuestas en cantidad y en cualidad.

Otra forma de identificar las proposiciones contrarias, es cuando la verdad de una proposición implica la falsedad de la otra.

Ejemplo 3

P: -3 es mayor que -1
Q: -1 es mayor que -3.

Son contradictorias porque la proposición **P** es falsa y esto implica que la proposición **Q** sea verdadera.

Ejemplo 4
Dadas las proposiciones

P: hoy es lunes
Q: hoy no es lunes.

Son contradictorias porque si **P** es verdadera automáticamente **Q** será falsa y lo contrario.

Es importante aclarar la diferencia entre proposiciones contradictorias y proposiciones contrarias.

3.4.2 Proposiciones contrarias

Se dice que dos proposiciones son CONTRARIAS si no pueden ser ambas verdaderas, aunque ambas puedan ser falsas.

Ejemplo 5
Considerando las proposiciones

P: Paola es mayor que Angélica
Q: Angélica es mayor que Paola

Inicialmente se podría pensar que son contradictorias, es decir, que si **P** es verdadera, **Q** sería falsa, y consecuentemente, si **P** es falsa, entonces **Q** sería verdadera, pero al considerar el hecho de que Paola y Angélica tengan la misma edad, ambas proposiciones serían falsas, por lo tanto no serían contradictorias, y en este caso se llamarían **contrarias**, debido a que ambas no pueden ser verdaderas pero sí falsas.

En forma general se puede decir que dos proposiciones universales que tienen los mismos sujetos y predicados pero difieren en cualidad son contrarias.

El siguiente ejemplo muestra claramente la diferencia entre las proposiciones contradictorias y contrarias.

Ejemplo 6

Dadas las proposiciones:

P: todos los números enteros son positivos
Q: algunos enteros son positivos
R: todos los enteros son negativos

Se puede afirmar que las proposiciones **P** y **Q** son contradictorias porque una es la negación de la otra (en este caso **P** es falsa mientras que **Q** es verdadera). Y las proposiciones **P** y **R** son contrarias ya que ambas no pueden se verdaderas pero si son ambas falsas.

3.4.3 Proposición Contingente

Una proposición que no es necesariamente verdadera ni necesariamente falsa se llama CONTINGENTE.

Ejemplo 1

P: todos los matemáticos son filósofos

Esta es una proposición que no es necesariamente verdadera (no todos los matemáticos son filósofos), ni necesariamente falsa (existen matemáticos que sí son filósofos)

Ejemplo 2

Q: todos los cuadrados son rectángulos

No necesariamente es falsa porque el cuadrado es un tipo de rectángulo, ni es necesariamente verdadera porque no todos los cuadrados son rectángulos

3.4.4 Proposiciones Subcontrarias

Se dice que dos proposiciones son subcontrarias si no pueden ser ambas falsas pero sí ambas verdaderas

Ejemplo 1

Las proposiciones

P: algunos enteros son positivos
Q: algunos enteros son negativos

Son subcontrarias debido a que ambas son verdaderas.

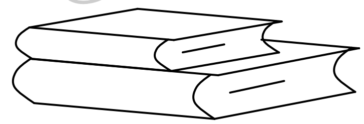
En forma general se afirma que dos proposiciones particulares que tienen el mismo término sujeto y término predicado pero diferente cualidad son subcontrarias

Ejemplo 2

***P**: algunos ingenieros de sistemas son matemáticos*
***Q**: algunos ingenieros de sistemas no son matemáticos*

Las proposiciones **P** y **Q** pueden ser las dos verdaderas, pero no pueden ser las dos falsas, por lo tanto se dice que son subcontrarias.

RESUMEN 3



Las proposiciones categóricas se clasifican en:

Proposición Categórica Universal afirmativa
Proposición Categórica Universal negativa
Proposiciones categóricas afirmativa particular
Proposiciones categóricas Negativa particular

La clasificación universal y particular hace referencia a:

ALGUNOS = PARTICULAR
TODOS = UNIVERSAL

Sobre la clasificación de las proposiciones como contrarias y contradictorias aprendimos:

contrarias = ambas pueden ser falsas
subcontrarias = ambas pueden ser verdaderas
contradictorias = cuando una es verdadera **necesariamente** la otra es falsa y viceversa.

Por ejemplo, necesariamente, al afirmar que “algunos enteros son negativos”, estamos afirmando que el resto son enteros positivos. Esto imposibilita que ambas proposiciones sean falsas.

Unidad 2

Razonamientos lógicos

Introducción

En esta unidad tendrá lugar la aplicación de los conceptos estudiados en la primera unidad al reconocimiento y validación de las diferentes leyes de inferencia así como de las formas de razonamiento inductivo.

Justificación

Esta unidad del curso de Lógica Matemática es significativamente importante para fortalecer la destreza en la formulación de argumentos e hipótesis que den validez lógica a nuevas concepciones o actualizaciones cognitivas.

En las formas de comunicación cotidiana utilizamos expresiones del lenguaje natural que en el fondo responden a estructuras de inferencia lógica, o por inducción o por deducción y que en la medida que se comprenda este proceso de pensamiento complejo se mejoran los procesos de interacción comunicativa y de resignificación cognitiva.

Intencionalidades formativas

Propósitos

- Aportar elementos significativos que contribuyan a desarrollar en el estudiante la habilidad para argumentar, razonar o formular generalizaciones por inducción o deducción a través de la interpretación de los fundamentos estructurales que caracterizan a tales métodos de inferencia lógica.

Objetivos

- Que el estudiante interprete la fundamentación teórica que soporta los métodos de inferencia lógica por deducción e inducción a través del estudio, análisis, aplicación y ejercitación de los axiomas y leyes de inferencia lógica en la formulación y demostración de razonamientos válidos contextualizados.

Metas

- El estudiante presentará una propuesta amplia de razonamientos y demostraciones como resultado del estudio, análisis y ejercitación en la interpretación y aplicación de los axiomas y leyes de inferencia lógica en los diferentes contextos disciplinares de formación.

Competencias

- El estudiante interpreta e identifica en forma clara la estructura y fundamento conceptual que tipifica los métodos de inferencia lógica por inducción y deducción en formulaciones y demostraciones de razonamientos válidos en situaciones específicas derivadas del estudio de contextos donde es pertinente su aplicabilidad.

Capítulos de la unidad

Capítulo 4: Razonamientos lógicos
Capítulo 5: Inferencias lógicas
Capítulo 6: Argumentos Inductivos

CAPÍTULO 4

4 Capítulo: Razonamientos lógicos

Objetivo general

➚ El propósito de este capítulo es brindar al estudiante elementos para la identificación de los diferentes tipos de razonamiento lógico, así como de instrumentos para determinar la su validez.

Objetivos específicos

- Comprender el papen que juegan los razonamientos deductivos e inductivos en un proceso de investigación.
- Diferenciar los razonamientos deductivos e inductivos
- Reconocer y construir silogismos
- Determinar la validez de un razonamiento lógico

Lección No.16 Razonamiento lógico

4.1 Razonar

Razonar es un proceso por el cual se establece una conclusión basada en una o más proposiciones supuestas o aceptadas, llamadas premisas, las cuales constituyen el punto de partida del proceso.

Si la conclusión es correcta significa que las premisas contienen la información necesaria y suficiente para establecer la conclusión y por lo tanto se puede afirmar que el razonamiento es correcto, de lo contrario, se dirá que es incorrecto.

Todos los seres humanos tenemos la capacidad del raciocinio; una operación del pensamiento, la más elevada, en la cual se enlazan ideas y fluyen otras, permitiendo así la comunicación con el exterior.

Se ha dicho que la lógica es la ciencia que estudia la estructura o forma del pensamiento, por lo cual no es difícil comprender que hay varias formas de pensamientos, más aún, existen varias formas de razonar. [10]

A continuación aprenderemos a identificar los razonamientos deductivo e inductivo:

4.1.1 Razonamiento inductivo

Este se puede definir como el proceso del pensamiento mediante el cual con base en experiencias, se establece un principio general, el cual tendrá validez no sólo para los casos observados, sino también para todos los de su especie.

Ejemplo:

Diego aplicó CHILE disuelto en agua y previno la presencia de gusanos. Juan aplicó CHILE disuelto en agua y previno la presencia de hormigas, Carlos aplicó CHILE disuelto en agua y previno la presencia de picudo de arroz, Camilo aplicó CHILE disuelto en agua y previno la presencia de mariposas de repollo. Luego, es posible concluir que es probable que EL CHILE actúe como un buen plaguicida natural.

[10] Galindo Patiño N. J. (1999). Lógica Matemática. Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD. Santa Fe de Bogotá. D.C. 1999

4.1.2 Razonamiento deductivo

Este razonamiento parte de lo general para llegar a lo particular. Lo que vale para todos, es válido para cada una de las partes.

Ejemplo:
Los abonos proporcionan nutrientes a las plantas. El estiércol es un abono orgánico, por lo tanto, el estiércol proporciona elementos nutrientes a las plantas.

A continuación estudiaremos el papel que juegan estas formas del razonamiento lógico en la investigación científica:

Lección No.17 El método científico

Los razonamientos deductivo e inductivo en el método científico

El método científico consiste en el conjunto de procedimientos para obtener un conocimiento que sea universal y, en principio, reproducible por cualquiera.

Desde los inicios de la Modernidad, el conocimiento científico en las ciencias naturales y exactas ha estado ligado a la observación sistemática y a la formulación de dicha observación mediante ecuaciones matemáticas, la llamada matematización de la ciencia, que garantiza tanto su explicación como su factibilidad.

Desde el punto de vista de los positivistas, el primer paso en cualquier investigación es la observación, una vez que se ejecuta la observación, surgen una o más preguntas, generadas por la curiosidad del observador, luego, el observador, mediante razonamiento inductivo, trata de dar una o más respuestas lógicas a las preguntas, cada solución tentativa preliminar a estas preguntas, son las hipótesis. Después de que ha enunciado una o más hipótesis, o explicaciones propuestas, el investigador elabora una o más predicciones, las cuales deben ser consistentes con las observaciones e hipótesis. Para hacer esto, el investigador usa el razonamiento deductivo. Enseguida, las predicciones son sometidas a pruebas sistemáticas para comprobar su ocurrencia en el futuro. Estas comprobaciones en conjunto reciben el nombre de experimentación. Cuándo la hipótesis se verifica, entonces se procesa la declaración final, que en ciencias se llama teoría que solo es válida para un tiempo y un lugar determinados. Si la teoría se verificara como verdadera en todo tiempo y lugar, entonces es considerada como ley.

Cosa distinta es la ciencia social. Aquí la reproducibilidad y la explicación son débiles o imposibles. En ellas se trata, no tanto de explicar como de comprender, en cuanto lo que se hace es una lectura de sistemas simbólicos, que son susceptibles de distintas interprepataciones, tanto desde las características mismas del científico, como de la época en la cual él está haciendo su trabajo.

Karl Popper, en la lógica del conocimiento científico, discutió con los positivistas sobre el carácter de la observación y el modelo inductivo de la ciencia. En efecto, aquellos pensaban que la ciencia comienza con la observación y de allí se hace una inducción para obtener una ley general. Popper, en cambio, señala que la ciencia comienza con una hipótesis que debe intentar falsarse (de ahí que su teoría se llame el falsacionismo), es decir, refutarse.

En la ciencia no se trata tanto de verificar como de que las teorías resistan los intentos de ser refutadas. Y para ello las teorías científicas deben ser escritas en encunciados universales, que pueden refutarse mediante contraejemplo, y no de enunciados existenciales.

Hagamos una ilustración; de la observación de los cuervos, alguien puede afirmar que existen cuervos negros. Pero ese enunciado no es falsable. En Cambio si alguien dice 'Todos los cuervos son negros' y alguien encuentra un cuervo de otro color, el enunciado resultó falsable. Por eso hay que escribir la ciencia en enunciados universales, que sean susceptibles de ser refutados.

Mientras una teoría resista los intentos de ser refutada, se dice que es el paradigma científico vigente. Todos los problemas de su campo de conocimiento se resuelven según establecen las leyes de la teoría, pero cuando esta es refutada, aparece un paradigma nuevo, que toma el papel del anterior, y así sucesivamente. Eso sucedió con la Física Toloméica, que fue refutada por la Física Galileana, que fue mejorada por la Newtoniana, que a su vez, fue rebatida, en sus fundamentos, por la física de la relatividad de Einstein.

Una explicación científica tiene la forma: un hecho se explica dentro de una ley científica que es una ecuación matemática. Así, el movimiento de un planeta se explica por la ecuación que describe su movimiento. Ella explica ese movimiento. Pero la explicación también sirve para la predicción porque la ecuación que sirve para describir también sirve para calcular en que lugar se encontrará ese planeta en un momento T cualquiera.

Para Popper su método sirve para superar el dilema entre explicar, en ciencias naturales, y comprender, en ciencias sociales. Porque explicar es comprender. Pero a diferencia de las ciencias naturales, las ciencias sociales no son susceptibles de matematización: nadie puede calcular los movimientos sociales ni las acciones de las personas, porque éstas son voluntarias, distintas, en consecuencia, a los movimientos físicos.

La comprensión, que como se dijo, refiere a sistemas simbólicos, como las culturas y las sociedades, es lo propio de las ciencias sociales. Aquí no hay una explicación distinta a la comprensión de un sistema simbólico y estas comprensiones se hacen en 'horizontes de comprensión que dependen del científico y su época. Por eso las ciencias sociales no son neutrales, ni existe la objetividad del investigador social, porque el lee los hechos sociales desde su formación, desde su propia personalidad y desde lo que sabe su época. Este es el punto distintivo central entre las ciencias naturales y las ciencias sociales. Por eso no hay una sola sociología, sino distintas escuelas sociológicas, ni una antropología, sino escuelas distintas, ni una pedagogía sino múltiples escuelas de pensamiento sobre la enseñanza. [11]

[11] Gadamer, Hans Georg. Verdad y Método. Editorial Sígueme, salamanca, 1972
Monsalve, Alfonso. La Teoría de la Argumentación. Editorial Universidad de Antioquia, 1982
Popper, Karl. La Lógica de la Investigación Científica. Tecnos, Madrid, 1962
La Miseria del Historicismo. Tecnos, Madrid, 1975.

Lección No.18 Silogismos categóricos

4.2 Silogismos categóricos

Un **silogismo** es un argumento deductivo en el que se infiere una conclusión a partir de dos premisas. Un silogismo categórico es un argumento deductivo consistente en tres proposiciones categóricas que contienen exactamente tres términos, cada uno de los cuales sólo aparece en dos de las proposiciones que lo constituyen. Dos de las proposiciones reciben el nombre de premisas y la otra se llama conclusión.

Forma estándar de un silogismo categórico
Se dice que un silogismo categórico está en **forma estándar** cuando satisface las siguientes condiciones:

1. Las premisas y conclusión son proposiciones categóricas que conservan el siguiente orden:

    1. **la premisa mayor se enuncia primero, luego**
    2. **la premisa menor y**
    3. **al final la conclusión.**

2. La conclusión de un silogismo de forma estándar es una proposición de forma estándar que contiene dos de los tres términos del silogismo.

3. La premisa mayor es aquella que contiene el término mayor y este es el que aparece como predicado de la conclusión.

4. La premisa menor es aquella que contiene el término menor, que es el correspondiente al sujeto de la conclusión.

5. Los términos mayor y menor aparecen, cada uno, en una premisa diferente.

Ejemplo 1

Dadas las premisas:

Ningún héroe es cobarde
Algunos soldados son cobardes

Y la conclusión: *por lo tanto, algunos soldados no son héroes*

Se puede observar claramente que el argumento deductivo es un silogismo categórico porque consiste en tres proposiciones categóricas (dos premisas y una conclusión) que contienen exactamente tres términos (héroe, cobarde y soldado).

Para saber si el silogismo categórico está en forma estándar, es necesario identificar el término mayor, el término menor, premisa mayor, premisa menor y analizar la conclusión.

En este caso el predicado de la conclusión es **héroe**, que constituye el término mayor, y por consiguiente la premisa mayor es: **ningún héroe es cobarde**; el sujeto de la conclusión es **soldado** que es el término menor, por lo tanto la premisa menor es: **algunos soldados son cobardes**, además, la conclusión tiene dos de los tres términos del silogismo: **soldados** y **héroes**, los términos mayor y menor aparecen, cada uno, en una premisa diferente, por consiguiente se puede establecer que este es un ejemplo de silogismo categórico en forma estándar, también aparece el término **cobardes** el cual se denomina término medio.

Ejemplo 2

Teniendo en cuenta el siguiente argumento deductivo, identificar la conclusión, establecer la naturaleza del silogismo y verificar sí esta en forma estándar.

> *Ningún barco de guerra es un navío comercial, así, ningún submarino nuclear es un navío comercial, puesto que todos los submarinos nucleares son barcos de guerra.*

Como el argumento deductivo está formado por tres proposiciones categóricas que contienen exactamente los tres términos: submarino nuclear, navío comercial y barcos de guerra, se puede afirmar que se trata de un silogismo categórico.

La conclusión se identifica como la proposición:

> **ningún submarino nuclear es un navío comercial**.

Y las premisas como las proposiciones:

> **ningún barco de guerra es un navío comercial** y
> **todos los submarinos nucleares son barcos de guerra**.

El predicado de la conclusión es el término **navío comercial**, el cual se constituye en el término mayor y por consiguiente la premisa mayor es, **ningún barco de guerra es un navío comercial**.

El sujeto de la conclusión es **submarino nuclear**, el cual se constituye en el término menor y por consiguiente la premisa menor es, **todos los submarinos nucleares son barcos de guerra**.

El análisis anterior permite afirmar que es un silogismo categórico en forma estándar el cual se puede escribir así:

Premisa mayor: Ningún barco de guerra es un navío comercial
Premisa menor: Todos los submarinos nucleares son barcos de guerra
Conclusión: Ningún submarino nuclear es un navío comercial

Agradecimientos al estudiante Carlos Arturo Serrano.

Ejemplo 3
Teniendo en cuenta el siguiente argumento deductivo, identificar la conclusión, establecer la naturaleza del silogismo y verificar si está en forma estándar.

> *Todos los satélites artificiales son descubrimientos científicos importantes; por lo tanto, algunos descubrimientos científicos importantes no son inventos norteamericanos puesto que algunos satélites artificiales no son norteamericanos.*

El argumento deductivo está formado por tres proposiciones categóricas que contienen los términos: satélites artificiales, descubrimientos científicos, inventos norteamericanos, por lo tanto se puede afirmar que se trata de un silogismo categórico.

Las premisas son:
Todos los satélites artificiales son descubrimientos científicos importantes, algunos satélites artificiales no son norteamericanos.

La conclusión es:
Algunos descubrimientos científicos importantes no son inventos norteamericanos.

El predicado de la conclusión es el término invento norteamericano, el cual se constituye en el término mayor y por consiguiente, la premisa mayor es, algunos satélites artificiales no son norteamericanos.

El sujeto de la conclusión es descubrimientos científicos, el cual se constituye en el término menor y por consiguiente la premisa menor es, todos los satélites artificiales son descubrimientos científicos.

Teniendo en cuenta el análisis anterior, se puede afirmar que es un silogismo categórico en forma estándar, el cual se puede escribir así.

Premisa mayor: algunos satélites artificiales no son norteamericanos
Premisa menor: todos los satélites artificiales son descubrimientos científicos
Conclusión: algunos descubrimientos científicos importantes no son inventos norteamericanos.

-- Nemotecnia ---------------------------------

Forma Estándar de un silogismo categórico

Sigue el siguiente protocolo y lograrás el objetivo....no olvides divertirte:

1. Identifica los tres términos
2. Separa las premisas de la conclusión
3. Analiza la conclusión obteniendo de esta el Sujeto y el Predicado
4. Identifica la premisa Mayor, y la premisa menor
5. Identifica el término medio.

Las premisas
Primera premisa: Solo esta premisa contiene el término mayor
Segunda premisa: Solo esta premisa contiene el término menor
Existe un término medio que aparece en las dos premisas

La conclusión: -Contiene 2 de los 3 términos de la siguiente manera:	
Para identificar cual es la premisa mayor busca el predicado de la conclusión y observa en cual de las dos premisas aparece este.	
Término Mayor	Predicado de la conclusión
Término menor	Sujeto de la conclusión

Lección No.19 Validez de un argumento

4.3 Validez de un argumento

Argumento deductivo

Un argumento en el cual las premisas involucradas proporcionan bases concluyentes para la verdad de la conclusión, se llama **argumento deductivo.**

Consiste en deducir su conclusión a partir de sus premisas, mediante una serie de argumentos elementales, cada uno de los cuales se conoce y acepta como válido

Argumento Válido

Un argumento que sigue una regla bien establecida se dice que es válido; los argumentos se juzgan como aceptables o inaceptables en la medida en que sean válidos.

Validez o invalidez de un argumento

Para probar la validez o invalidez de un argumento, se utiliza un método basado en el hecho de que éstas son características puramente formales de los argumentos, es decir, que dos argumentos que tienen exactamente la misma forma; son válidos o inválidos, independientemente de las diferencias del tema que traten.

Específicamente, para probar la invalidez de un argumento, basta con formular otro argumento que tenga exactamente la misma forma y tenga premisas verdaderas y conclusión falsa

En teoría, las tablas de verdad son apropiadas para probar la validez de un argumento de tipo general, pero en la práctica son cada vez más difíciles de manejar a medida que aumenta el número de enunciados o proposiciones que conforman dicho argumento. Un método más eficiente para probar la validez de un argumento extenso consiste en deducir su conclusión a partir de sus premisas, mediante una serie de argumentos elementales, cada uno de los cuales se conoce y acepta como válido, este proceso es el que se denomina método deductivo.

Lección No.20 Prueba formal de validez

4.3.1 Prueba formal de validez

Se define una **prueba formal** que un argumento determinado es válido, como una sucesión de enunciados, cada uno de los cuales, o es una premisa del razonamiento dado, o, se deduce de los enunciados precedentes mediante un argumento válido elemental, de tal forma que el último enunciado o proposición constituye la conclusión del argumento cuya validez se quiere demostrar.

Se define un **argumento válido elemental**, como un argumento que se puede interpretar como el proceso de sustituir enunciados o proposiciones en lugar de variables enunciativas.

4.3.2 Prueba de invalidez

Es obvio que, para un argumento inválido no existe una prueba formal de validez. Pero, si no se puede hallar una prueba de validez para un argumento, eso no quiere decir que sea inválido y que no se pueda construir dicha prueba.

A continuación se describe un método que está muy relacionado con el de las tablas de verdad, pero que es mucho más breve, en el cual se prueba la invalidez de un argumento hallando un único caso en el que se asignan valores de verdad a las variables del enunciado de tal forma que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa, lo que lleva a concluir que la forma argumental es inválida.

Ejemplo 1

Probar la invalidez del siguiente argumento por el método de asignar valores de verdad.

1. $f \rightarrow r$
2. $p \rightarrow r$
3. $\therefore\ f \rightarrow p$

Para probar que este argumento es inválido sin tener que construir una tabla de verdad completa, es necesario tener claro que un condicional es falso solamente si su antecedente es verdadero y su consecuente falso, utilizando este hecho se procede a asignar valores de verdad a las proposiciones de la conclusión, es decir, si **F** es verdadero y **P** es falso, entonces, la conclusión es falsa. Si a la proposición **R** se le asigna el valor verdadero, ambas premisas se convierten en verdaderas, porque un condicional es verdadero siempre que su consecuente sea verdadero. Lo anterior permite afirmar que si a las proposiciones **F** y **R** se les asigna un valor verdadero y a la proposición **P** un valor falso, entonces el argumento tendrá premisas verdaderas y una conclusión falsa, con lo cual queda probado que el argumento es inválido.

Con este método lo que realmente se hace es construir un renglón de la tabla de verdad del argumento indicado, la relación se puede observar más claramente cuando los valores de verdad se escriben horizontalmente, de la siguiente forma:

-------- Nemotecnia------

PREMISAS VERDADERAS				**CONCLUSIÓN FALSA**	
f	**r**	**p**	$f \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$f \rightarrow p$
verdadero	verdadero	falso	verdadero	verdadero	falso

Argumento Inválido

Un argumento se prueba inválido mostrando que por lo menos en un renglón de su tabla de verdad todas las premisas son verdaderas pero su conclusión es falsa.

Ejemplo 2.

Si Sandra es inteligente y estudia mucho, sacará buenas calificaciones y aprobará el curso. Si Sandra estudia mucho pero no es inteligente, sus esfuerzos serán apreciados y si sus esfuerzos son apreciados, aprobará el curso. Si Sandra es inteligente, entonces estudia mucho. Luego, Sandra aprobará el curso.

Tomando el siguiente lenguaje simbólico

I: Sandra es inteligente
S: Sandra estudia mucho
G: Sandra sacará buenas calificaciones
P: Sandra aprobará el curso
A: los esfuerzos de Sandra serán apreciados

Se pueden establecer las siguientes premisas:

1. $(i \wedge s) \rightarrow (g \wedge p)$
2. $\left[(s \wedge \neg i) \rightarrow t\right] \rightarrow [t \rightarrow p]$
3. $i \rightarrow s$

4. $\therefore$ **p**

Este argumento es inválido porque con cualquiera de las siguientes asignaciones de valores de verdad la conclusión **P** es falsa.

i	s	g	t	**p**
F	F	V	F	**F**

ó

i	s	g	t	**p**
F	F	F	F	**F**

Ejemplo 3

Si la inflación continua, entonces las tasas de interés permanecerán altas. Si la inflación continúa, entonces si las tasas de interés permanecen altas, descenderá la actividad comercial. Si las tasas de interés permanecen altas, entonces si la actividad comercial decrece, el desempleo aumenta. Así, si el desempleo aumenta, continuará la inflación.

Tomando el siguiente lenguaje simbólico:

P: la inflación continúa
Q: las tasas de interés permanecen altas
R: descenderá la actividad comercial
S: el desempleo aumenta

Se pueden establecer las siguientes premisas:

1. $p \to q$
2. $p \to (q \to r)$
3. $q \to (r \to s)$ / $\therefore$ $s \to p$

Este argumento es inválido porque la siguiente asignación de valores de verdad hace las premisas verdaderas pero la conclusión falsa:

p	**q**	**r**	**s**	$p \to q$	$p \to (q \to r)$	$q \to (r \to s)$	$s \to p$
F	F	F	V	V	V	V	F

Inconsistencia

En algunos casos no se puede dar ninguna asignación de valores de verdad a los enunciados de un argumento que hagan verdaderas sus premisas y falsa su conclusión, entonces, en este caso el argumento debe ser válido.

CAPÍTULO 5

5 capítulo: Inferencias lógicas

Objetivo general

- En este capítulo el estudiante aprenderá a identificar las diferentes reglas de inferencia y su aplicación para la demostración o refutación de un razonamiento.

Objetivos específicos

- Comprender, identificar y construir leyes de inferencia.
- Aplicar las leyes de inferencia a en la demostración
- Reconocer y aplicar la demostración directa e indirecta
- Reconocer y aplicar las refutaciones por contradicción y contraejemplo.

Lección No.21 Inferencias Lógicas

5.1 Inferencias Lógicas

Para definir las inferencias lógicas es necesario precisar algunos conceptos tales como razonamiento y demostración.

Razonamiento es el proceso que se realiza para obtener una demostración.
Demostración es el encadenamiento de proposiciones que permiten obtener otra proposición, llamada conclusión, a partir de ciertas proposiciones iniciales supuestas como verdaderas, que reciben el nombre de premisas. En la sección

se hará un análisis más detallado de la demostración.

Las inferencias lógicas: son las conclusiones que se pueden obtener después de realizar un razonamiento, este razonamiento solamente es verdadero si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Las premisas deben ser verdaderas.
2. Durante el proceso de deducción las premisas deben relacionarse sujetas a las leyes de la lógica.

Así, el conocimiento obtenido de proposiciones verdaderas preestablecidas (**premisas**), y aplicando las leyes de la lógica a esas premisas, se denomina **conclusión**.

A continuación se plantean algunas reglas de inferencia, se propone al estudiante, como ejercicio, probar su validez utilizando las tablas de verdad:

------ La clave --------

PONENS = PONER **TOLLENS = SACAR = NEGAR**

Lección No.22 Inferencias Lógicas

Reglas de inferencia:

A medida que vallas estudiando las reglas de inferencias encontrarás que éstas son usadas continuamente en el lenguaje natural. Las usamos para obtener conclusiones que consideramos normalmente válidas. Lo que haremos ahora, es detenernos a analizar porqué consideramos a estas inferencias válidas, aprenderemos que al construir la tabla de verdad de la inferencia lógica se puede determinar la validez de la misma, a la vez que aprendes a identificar las diferentes inferencias lógicas en los razonamientos que hacemos continuamente.

Poder identificar una inferencia lógica y poder clasificarla como válida o no mediante la construcción de la tabla de verdad te dará las bases para elaborar argumentos sólidos, presentes en todas las actividades académicas ya sea en la elaboración de ensayos o debates, como en las actividades cotidianas.

Veamos la primera regla, denominada Modus Ponendo Ponens ó MPP, también llamada simplemente MP ó Modus Ponens, nombre que puedes leer como Modo Afirmando_ Afirmando, veamos:

5.1.1 Modus Ponens (M. P) o Modus Ponendo Ponens (MPP)

¿Cómo interpretar esta ley?, observa el siguiente ejemplo:

Daniel escucha la siguiente afirmación **"Si llueve hace frío"**
En la siguiente "escena", Daniel observa llover, es decir **"llueve"**

¿Qué puede concluir Daniel? Que hará frío, es decir **"hace frío"**

Para obtener tan "obvia" conclusión, Daniel ha utilizado la más común de las inferencias lógicas, la cual denominaremos **MPP ó Modus Ponendo Ponens.**

En este ejemplo, las proposiciones simples son:

p = llueve
q = hace frío

Ejemplo:

Modus Ponens (M. P)
1-Si llueve hace frío
2-llueve
3-luego Hace frío

Las proposiciones así declaradas, nos permiten expresar en lenguaje natural lo expresado en lenguaje simbólico así:

$p \rightarrow q =$ Si llueve hace frío

Así que nuestro ejemplo puede ser representado en el lenguaje simbólico de la siguiente manera:

$p \rightarrow q$	Se lee : **si p entonces q**
p	Se lee : **ocurre p**
$\therefore$ q	Se lee : **de donde q**

El símbolo $\therefore$ (de donde) representa la conclusión de las premisas dadas; es decir que la conclusión, en este caso, es la proposición **q**

Ahora ya estamos listos para interpretar la regla de inferencia tal y como nos fue presentada en un comienzo, esto es:

$$\left[\left(p \rightarrow q \right) \wedge p \right] \rightarrow q$$

¿Cómo leer la regla de inferencia?

$p \rightarrow q$	**Si p entonces q**
∧ p	**y p** (y se da p, y ocurre p)
$\rightarrow q$	**Entonces q** (en conclusión q)

Es decir que $\left[\left(p \rightarrow q \right) \wedge p \right] \rightarrow q$ puede ser leído como **"Si p entonces q y se ocurre p, luego ocurre q"**

La magia del asunto radica en que mediante la aplicación de lo que ya has aprendido en el capítulo de conectivos lógicos podemos determinar la validez de la inferencia lógica Modus Ponen mediante la construcción de la tabla de verdad, de la cual esperamos obtener una tautología.

¿Cómo puede decirnos la lógica que estamos argumentando bien? ¿Cómo puede la lógica mediante una tabla de verdad demostrarnos que estamos usando una inferencia lógica correcta o incorrecta?

Tabla de verdad para la inferencia lógica MPP:

p	**q**	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$\left[(p \to q) \wedge p\right] \to q$
F	F	V	F	V
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V

Observa que efectivamente hemos obtenido una tautología, es decir, la inferencia lógica que estamos utilizando es correcta.

A continuación se presentan nueve reglas de inferencia. En el lado izquierdo se enuncia la regla de inferencia y en el lado derecho se propone una aplicación de la ley de inferencia en el lenguaje natural:

Ejemplo 1.

Premisa 1: Si Julián estudia Ingeniería de sistemas a distancia, entonces él estudia en la UNAD.
Premisa 2: Julián estudia Ingeniería de sistemas a distancia.
Conclusión: Julián estudia en la UNAD.

Simbólicamente, el ejemplo 1 se expresa así:

Si
p: Julián estudia Ingeniería de Sistemas a Distancia
q: Él estudia en la UNAD.

Procedemos ahora a utilizar el lenguaje simbólico definido, así:
Premisa 1: $p \to q$
Premisa 2: **p**
Conclusión: **q**

Ejemplo 2.

Premisa 1: Si x + y = z, entonces, y + x = z.
Premisa 2: x + y = z
Conclusión: y + x = z

Simbólicamente, si **p**: x + y = z
q: y + x = z

Entonces: Premisa 1: $p \to q$
Premisa 2: p

Conclusión: q

Ejemplo 3.

Premisa 1: $\neg p \to s$
Premisa 2: ~ p
Conclusión: s

Ejemplo 4.

Premisa 1: $\neg r \to (\neg t \wedge s)$
Premisa 2 : ~ r
Conclusión: ~ t **∧** s

5.1.2 Modus Tollens (M.T) o Modus Tollendo Tollens (MTT)

$p \rightarrow q$	Se lee : **si p entonces q**
~ q	Se lee : **ocurre ~q**
∴ ~ p	Se lee : **de donde ~p**

Esta regla de inferencia dice que si una implicación es verdadera y su consecuente es falso, entonces su antecedente será necesariamente falso; simbólicamente se expresa así:

$$\left[\left(p \rightarrow q\right) \wedge \neg q\right] \rightarrow \neg p$$

Ejemplo:

Modus Tollens (M. T)
Si llueve hace frío
no hace frío
luego no llovió

Ejemplo 1

Premisa 1: Si un ángulo de un triángulo es mayor de 90º, entonces la suma de los otros dos ángulos es menor de 90º.
Premisa 2: La suma de los otros dos ángulos no es menor de 90º.
Conclusión: Un ángulo de un triángulo no es mayor de 90º.

Simbólicamente:

p: Un ángulo de un triángulo es mayor de 90º.
q: La suma de los otros dos ángulos es menor de 90º.

Premisa 1: $p \rightarrow q$
Premisa 2: ~ q
Conclusión: ~ p

Ejemplo 2

Deducir una conclusión del siguiente conjunto de premisas.
Premisa 1: $q \to \neg r$
Premisa 2: ~ (~ r)
Conclusión: ~ q.

Ejemplo 3.

Premisa 1: $p \vee (q \to r)$
Premisa 2: ~ r
Conclusión: $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ D' Morgan.

Ejemplo 4.

Demostrar que la conclusión es consecuencia de las premisas dadas.
Premisa 1: ~ b
Premisa 2: $a \to b$
Premisa 3: $\neg a \to c$ Demostrar **c**.

Premisa 4: De la premisa 2 y de la premisa 1, $\left[(a \to b) \wedge \neg b\right] \to \neg b$ se puede concluir **~a** por el **MTT**.

Premisa 5. De las premisas 3 y 4, $\left[(\neg a \to c) \wedge \neg a\right]$ se puede concluir la proposición **c** por el **MPP**.

5.1.3 Silogismo Hipotético (S: H)

$p \to q$	Se lee : **si p entonces q**
$q \to r$	Se lee : **si q entonces r**
$\therefore \quad p \to r$	Se lee : **de donde** **si p entonces r**

Es un argumento que se expresa simbólicamente así:

$$\left[(p \to q) \wedge (q \to r)\right] \to (p \to r)$$

Ejemplo

> **Silogismo Hipotético (S: H)**
> **Si llueve hace frío**
> **Si hace frío llevo un abrigo**
> **luego si llueve llevo un abrigo**

Ejemplo 1.

Premisa 1. Si el agua se hiela, entonces sus moléculas forman cristales.
Premisa 2. Si las moléculas forman cristales, entonces el agua aumenta de volumen.
Conclusión. Si el agua se hiela, entonces el agua aumenta de volumen.

Simbólicamente

Sean las proposiciones p: El agua se hiela
q: Sus moléculas forman cristales
r: El agua aumenta de volumen

Premisa 1. $p \to q$
Premisa 2. $q \to r$
Conclusión. $p \to r$

Ejemplo 2

Premisa 1. $q \to \neg p$
Premisa 2. $\neg p \to r$
Conclusión. $q \to r$

Ejemplo 3

Premisa 1. $(s \vee t) \to (r \vee q)$
Premisa 2. $(r \vee q) \to \neg p$
Conclusión. $(s \vee t) \to \neg p$

Ejemplo 4.

A partir de las premisas dadas indicar la demostración de la conclusión.
Premisa 1: ~ r
Premisa 2: $\neg p \to q$
Premisa 3: $q \to r$ Demostrar **p**

Premisa 4: De las premisas 2 y 3 se concluye $\neg p \to r$ por **SH**
Premisa 5: De las premisas 1 y 5 se concluye **p** por **MTT**.

5.1.4 Silogismo disyuntivo (S. D) o Modus Tollendo Ponens (MTP)

$p \vee q$
~ p
∴ q

Esta ley se enuncia así:
Si una disyunción es verdadera y una de sus proposiciones simples es falsa, entonces necesariamente la otra proposición será verdadera. Simbólicamente se escribe así:

$$\left[\left(p \vee q \right) \wedge \neg p \right] \rightarrow q \quad \textbf{o} \quad \left[\left(p \vee q \right) \wedge \neg q \right] \rightarrow p$$

Silogismo disyuntivo (S. D) **Cae Cara o Sello** **No cayó sello** **luego cayó cara.**

Ejemplo 1

Premisa 1: O la energía interna de un átomo puede cambiar con continuidad o cambia sólo a saltos.
Premisa 2: La energía interna de un átomo no puede cambiar con continuidad
Conclusión: La energía interna de un átomo cambia sólo a saltos.

Simbólicamente
p: La energía de un átomo puede cambiar con continuidad
q: La energía de un átomo sólo cambia a saltos
Premisa 1: p v q
Premisa 2: ~ p
Conclusión: Q.

Ejemplo 2

Premisa 1: ~ q v r
Premisa 2: ~ r
Conclusión: ~ q

Ejemplo 3

Premisa 1: (s **∧** t) v r
Premisa 2: ~ (s **∧** t)
Conclusión: r

Ejemplo 4.

Demostrar que la conclusión es consecuencia de las premisas dadas.
Premisa 1: ~ q v s
Premisa 2: ~ s
Premisa 3. $(\neg r \wedge s) \rightarrow q$ **Demostrar:** r **∧** s

---

Premisa 4: De las premisas 1 y 2 se puede concluir **~ q** por **MTP**
Premisa 5: De las premisas 3 y 4 se puede concluir **~ (~ (r ∧ s))** por **MTT**, que es equivalente a **r ∧ s** por la ley de la doble negación.

5.1.5 Dilema constructivo (D.C)

$$(p \to q) \wedge (r \to s)$$
$$p \vee r$$
$$\therefore q \vee s$$

Ejemplo:

Dilema constructivo (D.C)
Si estudio aprendo y si duermo descanso.
Estudié o dormí.
Luego Aprendí o descansé.

5.1.6 Absorción (Abs)

$$p \to q$$
$$\therefore\ p \to (q \wedge p)$$

Absorción (Abs.)
Si estudio aprendo
Estudio, luego aprendo y estudio

5.1.7 Simplificación (Simp.)

$p \wedge q$

$\therefore$ p

Simplificación (Simp.)
Estudio y aprendo
Luego, estudio

5.1.8 Conjunción (Conj)

p
q
$\therefore\ p \wedge q$

Conjunción (Conj.)
Estudio
Trabajo
Luego, etudio y trabajo

5.1.9 Adición (Ad.)

p
$\therefore\ p \vee q$

Adición (Ad.)
Estudio
Luego, etudio ó trabajo

Lección No.23 Aplicación de las leyes de inferencia

Ejemplos de aplicación de las leyes de inferencia:

Ejemplo 1

En el siguiente ejercicio se propone un ejemplo de construcción de una prueba de validez:

Si gana Gloria o Héctor, entonces pierden tanto Jorge como Kelly. Gloria gana. Por lo tanto, pierde Jorge.

Para analizar y construir la prueba de validez, es necesario utilizar un lenguaje simbólico que permita simplificar los enunciados, así:

Identificación de las premisas:

G = Gloria gana
H = Héctor gana
J = Jorge pierde
K = Kelly pierde

Por lo tanto la prueba de validez será:

1. $(G \vee H) \rightarrow (J \wedge K)$
2. G

$\therefore$ **J** (Se lee: de donde **J, J** es la premisa que esperamos demostrar).

---

3. G v H **2, Ad.** (por Adición en **2**)

Necesitamos llegar a **J** desde la **G**, observamos que para llegar a la **J** se requiere **G v H**, como sólo tengo la **G**, adiciono **H**. Por lo tanto aplico la ley de Adición en la premisa **2,** lo que se escribe **2, Ad.** (Ad indica que apliqué la ley de adición)

4. J ∧ K **1,3 M. P**

J ∧ K es la consecuencia de **G v H** aplicando la ley de inferencia **MP** (Modus Ponendo Ponens) con las premisas 1 y 3.

5. J **4, Simp.** Tenemos J ∧ K, pero solo nos intereza la J, por lo tanto simplificamos. Aplicando la ley de inferencia de simplificación en la premisa 4.

Ejemplo 2

Si sigue lloviendo, entonces el río crecerá. Si sigue lloviendo. Si sigue lloviendo y el río crece, entonces el puente será arrastrado por las aguas. Si la continuación de la lluvia hace que el puente sea arrastrado por las aguas, entonces no será suficiente un solo camino para toda la ciudad. O bien un solo camino es suficiente para toda la ciudad o bien los ingenieros han cometido un error. Por tanto, los ingenieros han cometido un error.

Utilizando el siguiente lenguaje simbólico:

C: continúa lloviendo
R: el río crece
P: el puente es arrastrado por las aguas
S: un solo camino es suficiente para toda la ciudad
E: los ingenieros han cometido un error

La prueba formal de validez es:

1. $C \to R$
2. $(C \wedge R) \to P$
3. $(C \to P) \to \neg S$
4. S v E **/ ∴ E**

---

5. $C \to (C \wedge R)$ **1, Abs.**
6. $C \to P$ **5,2, S. H.**
7. ~ S **3,6, M. P.**
8. E **4,7, D. C.**

Ejemplo 3

Si un hombre se orienta siempre por su sentido del deber, tiene que renunciar al goce de muchos placeres, y si se guía siempre por su deseo de placer, a menudo olvidará su deber. O bien un hombre se guía siempre por su sentido del deber, o bien siempre se orienta por su deseo de placer. Si un hombre se guía siempre por su sentido del deber, no descuidará a menudo su deber, y si siempre se guía por su deseo de placer, no renunciará al goce de muchos placeres. Luego, un hombre debe renunciar al goce de muchos placeres si y sólo si no descuida a menudo su deber.

Tomando el siguiente lenguaje formal:

P: se orienta por su sentido del deber
Q: renuncia al goce de placeres
R: se guía por su deseo de placer
S: olvidará su deber

Las premisas quedan así:

1. $P \rightarrow Q$
2. $R \rightarrow S$
3. P v R
4. $P \rightarrow \neg S$
5. $R \rightarrow \neg Q$ / $\therefore\ Q \leftrightarrow \neg S$

Ejemplo 4

Si no ocurre, que si un objeto flota en el agua entonces es menos denso que el agua, entonces se puede caminar sobre el agua. Pero no se puede caminar sobre el agua.
Si un objeto es menos denso que el agua, entonces puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso.

Si puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso, entonces el objeto flotará en el agua.

Por tanto, un objeto flotará en el agua si y sólo si es menos denso que el agua.

Utilizando el siguiente lenguaje formal:

P: un objeto flota en el agua
Q: es menos denso que el agua

R: se puede caminar sobre el agua
S: puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso.

Las premisas en forma simbólica son:

1. $\neg(P \to Q) \to R$
2. ~ R
3. $Q \to S$
4. $S \to P$ **/** $\therefore\ P \leftrightarrow Q$

Demostrar **P ↔ Q** equivale a demostrar que $P \to Q \wedge \quad Q \to P$.

5.	$P \to Q$	Por **MPP** entre **1** y **2**
6.	$Q \to P$	Por **S.H** entre **3** y **4**

Lección No.24 Demostración directa e indirecta

5.2 La demostración

La demostración es un razonamiento que prueba la validez de un nuevo conocimiento; es el enlace entre los conocimientos recién adquiridos y los conocimientos anteriores. Los procedimientos de demostración permiten establecer la conexión lógica entre las proposiciones fundamentales de la teoría, sus consecuencias sucesivas, hasta deducir la conclusión o tesis que así se demuestra.

Los principales tipos de demostración son:

5.2.1 La demostración directa

La demostración directa de una proposición **t** (teorema) es un conjunto de proposiciones o premisas que son postulados o proposiciones de validez aceptada y de las cuales se infiere t como consecuencia inmediata.

Ejemplo 1.

Dadas las premisas: 1. $p \to \neg q$

2. $r \to q$

Concluir : t. $p \to \neg r$

Demostración: Puesto que $r \to q$ es equivalente a $\neg q \to \neg r$, se tiene la premisa
3. $\neg q \to \neg r$, ahora, de las premisas 1 y 3 se puede concluir **t**, es decir, como $p \to \neg q$ y $\neg q \to \neg r$, entonces, $p \to \neg r$ **.**

Ejemplo 2

Demostrar que si **x** es impar, entonces que $\mathbf{x^2}$ es impar. El enunciado genera las siguientes premisas:

1. **x** es impar
2. **x = 2n+ 1**, donde n es un entero

Hay que demostrar que $\mathbf{x^2 = (2n + 1)^2}$ es impar.

Demostración:
Si **x** es impar, entonces **x = 2n + 1**, entonces $\mathbf{x^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1}$, esta expresión se puede escribir de la forma $\mathbf{2(2n^2 + 2n) + 1}$, tomando el término $\mathbf{2n^2 + 2n}$ como el entero **m**, se tiene que:

$\mathbf{x^2 = (2n + 1)^2 = 2m + 1}$, es decir , $\mathbf{x^2}$ es un número impar.

5.2.2 La demostración indirecta

Se realiza una demostración indirecta cuando se establece la validez de una tesis t probando que las consecuencias de su contraria son falsas.

Ejemplo 1.

Construir la demostración indirecta de:
Si $\mathbf{x^2}$ es par, entonces **x** es par, (con **x** entero)
Suponga que existe al menos un entero **x** tal que $\mathbf{x^2}$ es par y **x** es impar. Por el ejemplo 2 analizado en la demostración directa, se sabe que si **x** es impar, entonces $\mathbf{x^2}$ es impar, luego es imposible que **x** sea impar y que $\mathbf{x^2}$ sea par. Esta es la contradicción buscada.

5.2.3 La demostración por recursión

Cuando la tesis se prueba por medio de inducción matemática.

Ejemplo 2.

Este tipo de demostraciones se utilizan cuando los enunciados tienen una proposición abierta en una variable **n**, y es necesario demostrar que tal proposición se verifica para todos los elementos **n** que pertenecen a un subconjunto infinito dado sobre los números enteros, el axioma de la inducción matemática es el siguiente:

Dado un conjunto de números enteros $\mathbf{A = \{n \ / \ n \geq a\}}$ y una proposición de la forma **P(n),** se puede demostrar la verdad de esta proposición estableciendo los siguientes pasos:

I. **P(a)** es verdadera cuando se sustituye n por a en **P(n)**
II. Se supone que la proposición **P(n)** es verdad para todo **k** del conjunto **A**, es decir, **P(k)** es verdadera, a esta proposición, se le llama Hipótesis de Inducción.
III. Se demuestra que para el siguiente término al k-ésimo, osea **k+1**, **P(k+1)** es verdadera.

Ejemplo 3.

Demostrar que para todo entero ≥ **1**, se verifica que: **P(n): 1+2+…+n = n (n+1) / 2**

I. **P(1)** es verdadera porque : **1 = 1(1 + 1) / 2**

II. Hipótesis de Inducción: **P(k): 1+2+…+k = k (k + 1) / 2** para todo **k ≥ 1**

III. Demostrar para el término **k + 1**, es decir, probar que se verifica:
1 + 2 + … + k + k + 1 = (k + 1) (k + 2) / 2.

Por hipótesis de inducción:
1+2+…+k = k (k + 1) / 2 para todo **k ≥ 1**, sumando **k + 1** a cada miembro de esta igualdad se obtiene:

$$1+2+\ldots+k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \qquad \text{resolviendo la suma}$$

$$= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$

sumando términos semejantes

$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$

factorizando

$$= (k + 1)(k + 2) / 2$$

lo que se quería demostrar.

Lección No.25 La refutación

5.2.4 La demostración por refutación

Es el razonamiento que prueba la falsedad de una hipótesis o la inconsecuencia de su supuesta demostración; los métodos de refutación son la refutación por contradicción y la refutación por contraejemplo.

5.2.4.1 La refutación por contradicción

Refutar la proposición *"el cuadrado de todo número impar es un número par"* :

Como todo número impar se puede escribir de la forma **2n + 1**, donde **n** es un entero, y puesto que todo número par se puede escribir en la forma **2m**, con **m** un entero, la proposición dada implica que:

$(2n + 1)^2 = 2m$ para algún **n** y algún **m**

o, $4n^2 + 4n + 1 = 2m$

Se supone que ambos miembros deben representar el mismo entero, pero el miembro de la izquierda no es divisible por 2, mientras que el de la derecha si es divisible por 2. Esto es una contradicción evidente y, por lo tanto, la proposición dada es falsa.

5.2.4.2 La refutación por contraejemplo

Refutar la proposición *"el cuadrado de todo número impar es par":*
Se debe encontrar un número impar cuyo cuadrado sea impar, como $\mathbf{5^2 = 25}$, queda refutada la proposición.
Se deja como ejercicio de consulta investigar otros ejemplos de los tipos de demostración y de los métodos de refutación.

CAPÍTULO 6

6 Capítulo: Argumentos Inductivos

Objetivo general

Utilizar el método inductivo para establecer si las premisas que conforman un argumento son verdaderas, sin tener que demostrar la verdad de la conclusión.

Objetivos específicos

- Identificar los argumentos analógicos y clasificarlos como probables o no probables
- Evaluar argumentos analógicos
- Refutar un argumento por medio de una analogía

Lección No.26 Argumentos inductivos

Introducción

Existen varias clases de argumentos, unos permiten demostrar las conclusiones a partir de la validez de sus premisas (método deductivo), mientras que otros sólo buscan establecer si las premisas son probables o probablemente verdaderas, sin pretender demostrar la verdad de sus conclusiones como consecuencia necesaria de las premisas, este tipo de argumentos recibe el nombre de **Argumentos Inductivos**.

----observación y experiencia las bases de la inducción-----

El método inductivo es un tipo de razonamiento que se deriva de la observación y de la experiencia, lo cual lo hace totalmente diferente al método deductivo (estudiado en el capítulo anterior) y se basa fundamentalmente en dos aspectos:

1. En la semejanza que hay entre los objetos.
2. En suponer que un suceso puede volver a ocurrir teniendo en cuenta que en condiciones similares ha sucedido.

El primer aspecto hace referencia a la observación y el segundo en la experiencia.

-----la observación y la experiencia nos inducen a una conclusión -------------

La aplicación o el análisis de estos dos aspectos permiten **inferir o pronosticar** los efectos que producirá la ocurrencia del suceso, tomando como referencia lo ocurrido con eventos anteriores de características similares.

Lección No.27 El problema de la inducción

El problema de la inducción:

Una **inducción típica, analizada sobre el modelo de la deducción**, tiene como premisas formulaciones particulares, por ejemplo: “el evento a del tipo **X**, es seguido del evento **b**, del tipo **Y**”, “el evento **c** del tipo **X** es seguido del evento **d** del tipo **Y**”, y así sucesivamente; tiene por conclusión una formulación general, Sin restricciones: “eventos del tipo X son seguidos por eventos del tipo Y”.

En este caso surge un problema lógico porque según el método deductivo, los argumentos de esa forma no son válidos, de manera que no se puede inferir esa conclusión, ni saber si es verdadera basada en la verdad de las premisas.

El problema lógico de cómo justificar ese tipo de razonamientos se llama tradicionalmente “el problema de la inducción” las razones de este problema son:

> *1. Como la conclusión es general, tendrá una aplicación más amplia de la que cualquier conjunto de premisas pueda garantizar.**---LA CLAVE--(La conclusion es más general que las premisas)----***
>
> *2. La verdad de la conclusión no puede nunca ser garantizada por la verdad de las premisas porque siempre puede presentarse un nuevo caso que convierta en falsa la conclusión.**--- LA CLAVE---(En algún momento se puede llegar a dar una premisa falsa)---.***

Lo anterior permite afirmar que la inducción es deficiente con respecto al modelo deductivo, visto como procedimiento de descubrimiento y como procedimiento de confirmación.

De los argumentos inductivos el que se usa con mayor frecuencia es el analógico.

Lección No.28 La analogía

6.1 Argumento inductivo por analogía

La analogía es la base de la mayoría de los razonamientos que van de la experiencia pasada a lo que sucederá en el futuro.

- La mayoría de las inferencias cotidianas proceden por analogía.
- Ningún argumento por analogía pretende ser matemáticamente cierto.
- Los argumentos analógicos no se clasifican como válidos o inválidos, lo único que se puede afirmar de ellos es que son probables o no probables.

La analogía también se usa en la explicación, donde algo no familiar se hace inteligible por medio de una **comparación** con alguna otra cosa, presumiblemente más familiar, con la cual tiene ciertas similitudes.

El uso de analogías en la descripción y la explicación no es igual que su uso en la argumentación, aunque en algunos casos puede no resultar fácil decidir cuál uso se pretende hacer.

Hacer una **analogía** entre dos o más entidades es indicar uno o más aspectos en los que son similares,

mientras que **caracterizar un argumento por analogía** es en términos generales, describir el argumento dado diciendo que contiene premisas que afirman, primero, que dos cosas son similares en dos aspectos y, segundo, que una de esas cosas tiene una característica adicional, de lo cual se extrae la conclusión de que la segunda cosa tiene también esa otra característica.

Ejemplo 1.

Identifique en el siguiente párrafo el argumento analógico

Los escritores JHON DOLLARD y NEAL E. MILLER, en su libro Personalidad y psicoterapia afirman:

> *"Hemos dicho que las personas normales tienen poca motivación para dedicar un esfuerzo especial al estudio de sí mismas. Lo mismo es cierto de la aritmética. Si la presión de los padres y de la escuela no proporcionara una motivación, habría un aprendizaje escaso de las*

> *matemáticas. Por analogía, parece posible que pueda motivarse y prepararse a los niños para usar sus habilidades mentales con el fin de resolver problemas emocionales. En la actualidad, no reciben casi ninguna preparación para el desarrollo de esta importante capacidad ".*

En este párrafo, el argumento analógico es: Si la presión de los padres y de la escuela no proporcionara una motivación, habría un aprendizaje escaso de las matemáticas. La analogía se basa en la semejanza. –**OBSERVACIÓN**-

Ejemplo 2

Si alguien dice que le han extraído una muela sin anestesia y otro le expresa su consideración, entonces surge la pregunta: ¿Cómo sabe que le dolió? Una respuesta podría ser: "Yo he ido al odontólogo y sé cuanto duele una simple curación sin anestesia, ¿cómo será una extracción?, él tiene el mismo tipo de sistema nervioso que yo, por lo tanto puedo inferir que en esas condiciones, sintió un terrible dolor"

En este caso el argumento analógico se fundamenta en la **EXPERIENCIA,** tendiendo en cuenta que en condiciones similares ya sucedió.

Lección No.29 La fuerza de los argumentos

6.1.1 Evaluación de los argumentos analógicos

Ningún argumento por analogía es deductivamente válido, en el sentido de que la conclusión no es consecuencia necesaria de las premisas, lo que se puede establecer es si sus conclusiones **son más o menos probables.** Para lograr este propósito es indispensable fijar algunos criterios que permitan llevar a cabo la evaluación de argumentos analógicos, estos son:

6.1.1.1 Número de entidades entre las que se establece la analogía (Analogía por EXPERIENCIA)

Significa que es importante tener en cuenta el número de veces que ha ocurrido el suceso, esto da más consistencia a la conclusión y una mayor probabilidad de que se repita el suceso.

Ejemplo:

Si un electrodoméstico que se compro en un determinado almacén salió defectuoso, una conclusión apresurada sería afirmar que los electrodomésticos que se compran en ese almacén salen defectuosos; pero si esa misma conclusión se hace sobre la base de que 10 electrodomésticos comprados allí han resultado defectuosos, la conclusión cobra mayor validez y la probabilidad de que siga ocurriendo lo mismo crece.

6.1.1.2 Número de aspectos en los cuales las cosas involucradas se dice que son análogas -- OBSERVACICÓN---

Este criterio hace referencia a todos los aspectos en que los sucesos son análogos, y cuando se encuentra un mayor número de circunstancias o características de semejanza entre los sucesos, mayor será la validez de la conclusión.

Ejemplo:

El hecho de que un par de zapatos nuevo, ha sido comprado en el mismo almacén que el par viejo, el cual fue muy resistente, es una premisa de la que se sigue que probablemente el nuevo par será también resistente. Pero la misma conclusión se sigue con mayor probabilidad si la premisa afirma no solamente que los zapatos fueron comprados en la misma tienda, sino que son de la misma marca, que eran los más caros del almacén y que tienen el mismo estilo.

6.1.1.3 La fuerza de las conclusiones con respecto a sus premisas

En este caso el criterio afirma que con premisas iguales se pueden generar conclusiones diferentes y que su validez no depende de las premisas sino de la fuerza de la conclusión.

Ejemplo:

Una persona adquirió un carro nuevo y la ha dado un rendimiento de 10 Km / litro de gasolina, otra persona puede inferir que su carro nuevo, de la misma marca y modelo le dará un rendimiento igual (lo cual es probable); pero si la inferencia es que su carro le dará un rendimiento superior a 10 Km / litro, entonces esta conclusión será menos probable y la conclusión será mucho más débil si se afirma que el automóvil rendirá exactamente 10 Km / litro.

Lección No.30 Analogía refutadora

6.1.1.4 Refutación por medio de una analogía refutadora

Un método básico, para evaluar como válido un argumento desde el punto de vista lógico, es el que recurre a la analogía para demostrar que otro argumento está equivocado o es incorrecto.

Este método consiste en refutar un argumento, mostrando que sus premisas no apoyan la conclusión que se pretende sostener, sin necesidad de demostrar que por lo menos una de sus premisas es falsa o está equivocada.

Si un argumento tiene premisas verdaderas pero conclusión falsa, esto es base suficiente para clasificarlo como inválido; pero, si no se sabe si las premisas son verdaderas o falsas, se puede probar su invalidez construyendo una analogía refutadora.

Se define una analogía refutadora de un argumento dado como un argumento de exactamente la misma forma o estructura del argumento dado, pero cuyas premisas se conocen como verdaderas y su conclusión como falsa, así la analogía refutadora resulta inválida y como el argumento original tiene la misma forma también se considera inválido.

Ejemplo 6

El siguiente texto muestra una analogía refutadora.

"El señor Clifford A. Wrigth afirma que Israel no es una democracia porque otorga al judaísmo una posición especial dentro de la Ley. ¿Realmente es así? La Ley británica contra la blasfemia protege solamente a las creencias de los cristianos. Esas leyes no vician los reclamos británicos que es un país democrático, aunque se puede argüir que en virtud de ellos su democracia es menos perfecta. Israel tiene sufragio universal, un sistema multipartidista y una prensa libre. Para todos, menos para los ciegos partisanos, esto significa que es una democracia".

-------------------- LA CLAVE -------------------

¿Observaste como la inducción está relacionada con la probabilidad?

Información de Retorno

1. Lógica:

Desde Aristóteles, se ha dado a la lógica una relación directa con el lenguaje natural, no obstante, en su evolución, la lógica ha apropiado unos símbolos y reglas de inferencia que le han dado una estructura formal estricta, al punto de hablar hoy de una Lógica Matemática. Así es como hoy decimos que la lógica es una ciencia formal, que estudia la estructura de los argumentos lógicos para determinar su validez.

2. Conjunto:

Intuitivamente, un conjunto es una colección de objetos bien definidos. Estos objetos reciben el nombre de elementos o miembros del conjunto; se nombran con letras mayúsculas y sus elementos con letras minúsculas escrita entre corchetes o llaves. Los conjuntos se representan gráficamente por medio de diagramas denominados diagramas de Venn-Euler o simplemente, diagramas de Venn; en los cuales los conjuntos se delimitan por círculos.

8. Representación de los conjuntos:

Una forma sencilla de visualizar los conjuntos y las relaciones entre ellos, es mediante la utilización de esquemas gráficos llamados **círculos de Euler o diagramas de Venn.** Estos esquemas están compuestos por una región cerrada del plano (generalmente un rectángulo), la cual representa el conjunto universal, y por uno o varios círculos que representan los conjuntos a graficar.

Generalmente, los conjuntos se identifican con letras mayúsculas y sus elementos con minúsculas.

- Para indicar que un elemento es un miembro de un conjunto, se utiliza el símbolo **" ∈ "** **(se lee pertenece a**) y
- para indicar que no esta en el conjunto se utiliza el símbolo **"∉" (se lee no pertenece a).**

Esta es la representación gráfica correspondiente:

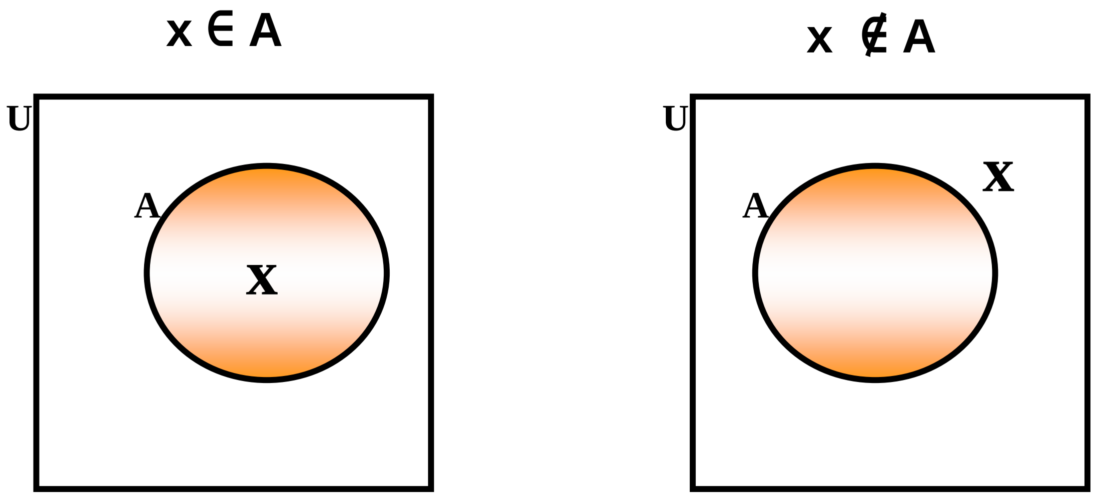


Figura No. 1

9. Formas para determinar un conjunto

Básicamente existen dos formas para determinar un conjunto, éstas son:

Por extensión

Un conjunto está determinado por extensión cuando se describe el conjunto nombrando cada uno de sus elementos. Por ejemplo:

A = {2, 4, 6, 8}
B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
C = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19,…}
D = {a, e, i, o, u }

Por comprensión

Un conjunto está determinado por comprensión cuando se nombra una propiedad, una regla o una característica común a los elementos del conjunto. Por ejemplo:

C = {Números impares menores que 10}
D = {Vocales}
B = {Dígitos}

Lenguaje:
E = {x ∈ R / 0 ≤ x < 9}, en este caso se utiliza un lenguaje muy específico, el cual se lee así:

*E igual al conjunto de todos los números reales tales que (o que verifican que) cero (**0**) es menor o igual a **x, y, x** a su vez es menor que **9***, esta notación se usa con mucha frecuencia para describir intervalos, para escribir la solución de una inecuación o para representar el dominio de una función real.

10. Conjuntos finitos, infinitos y conjuntos especiales

Conjuntos infinitos

Existen conjuntos como por ejemplo:

A = {x ∈ R / 0 ≤ x < 9} ó **Z = {x ∈ N / x es par}**

Que no se pueden expresar por extensión debido a que nunca se terminaría de escribir la lista de los números reales que pertenecen al conjunto **A**, o, los naturales que pertenecen a **Z**, este tipo de conjuntos, reciben el nombre de **INFINITOS**;

Conjuntos finitos

Mientras que otros, como por ejemplo:

C = {x / x es vocal} ó **D = {x / x es dígito par}**

Que están formados por cierto número de elementos distintos, reciben el nombre de conjuntos **FINITOS**.

¿Todos los conjuntos que se nombran por comprensión, se pueden escribir por extensión?

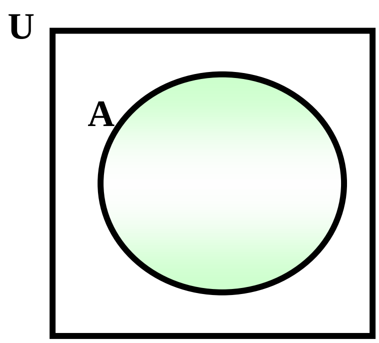
El análisis anterior, permite dar respuesta a esta pregunta, se sugiere buscar más ejemplos que justifiquen la respuesta para que sean analizados con el tutor y luego socializados en los equipos de trabajo.

Conjuntos especiales

Conjunto Vacío

Un conjunto que carece de elementos se denomina conjunto vacío y se simboliza así:

{ } ó $\varnothing$



A = $\varnothing$

Figura No. 2.

Naturalmente el conjunto **$\varnothing$** forma parte de cualquier conjunto **A**, por lo cual se puede afirmar que:

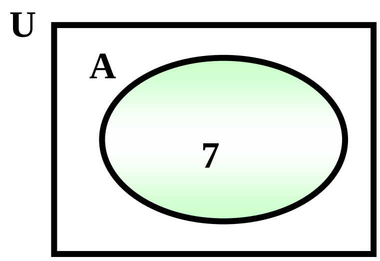
$$\varnothing \subset A$$

¿El conjunto **Φ** (vacío) es un subconjunto de todo conjunto?

Ejemplo 1.
Si D = {x ∉ N / x ≠ x), obviamente **D** es un conjunto que carece de elementos, puesto que no existe ningún número natural que sea diferente a sí mismo.

Conjunto Unitario

Se denomina conjunto unitario al conjunto formado por un sólo elemento.



A = **Conjunto Unitario**
A = {7}

Figura No. 3

Ejemplo:

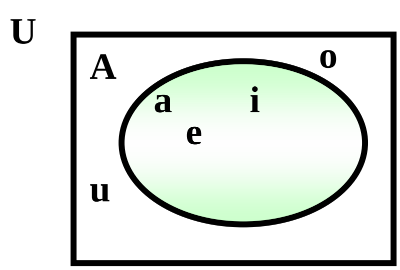
E = {x / x es un primo par}

El único número que cumple las dos condiciones (ser primo y a la vez par) es el número **2**, por lo tanto **E = {2}** se llama unitario.

Conjunto Universal

Cuando se habla o se piensa en los conjuntos, es conveniente establecer la naturaleza de sus elementos, por ejemplo:

Los elementos del conjunto **A = {a, e, i}** pertenecen al conjunto de las vocales, **V = {a, e, i, o, u}**, es decir, $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$, este conjunto **V** constituye el universo del conjunto **A**, por esta razón se dice que **V** es un conjunto Universal.



U = **Conjunto Universal**

A = {a,e,i}

U = V = {a,e,i,o,u}

Figura No. 4

Similarmente, si **A = {x ∈ N / x es primo}** sus elementos son elementos del conjunto de los números naturales "**N**", **A ⊂ N** y en este caso, **N** se constituye en el conjunto universal. Generalmente, el conjunto universal se simboliza con la letra **U**.

Conjunto de partes o conjunto de conjuntos

Si A es un conjunto, el conjunto de partes de **A**, escrito como **P(A**) está formado por todos los subconjuntos que se pueden formar del conjunto **A**.

Ejemplo 1.
Si **A = {1, 3, 5}**, entonces el conjunto de partes de **A** esta formado por los siguientes subconjuntos:

P (A) = {{1}, {3}, {5}, {1,3}, {1,5}, {3, 5}, {1, 3, 5}, Ø}.

Ø ∈ P(A) y 2^n subconjuntos

Note que:
Como ya habíamos analizado, el conjunto vacío está en todo conjunto y este caso no es la excepción, por esta razón **Ø∈ P(A).** Además, cave anotar que los elementos del conjunto **A** son a su vez conjuntos, por lo que se dice que el conjunto **P(A)** constituye una **familia de conjuntos.**

El número de elementos del conjunto **P(A)** depende del número de elementos de A; en el ejemplo, **A** tiene 3 elementos y **P(A)** tiene **8 = 2^3** elementos, en general, "Si **A** tiene n-elementos se pueden formar **2^n** subconjuntos del conjunto **A"**.

¿Cuántos y cuáles son los subconjuntos que se pueden formar de un conjunto
A = {1,3,5} ?

Ejemplo 2.
Sea **B = {2, {1, 3}, 4, {2, 5}}. B** no es una familia de conjuntos porque algunos elementos de **B** son conjuntos y otros no. Para que el conjunto **B** fuera un conjunto de partes o una familia de conjuntos debería estar expresado de la siguiente forma:

B = { {2}, {1,3}, {4}, {2,5} }.

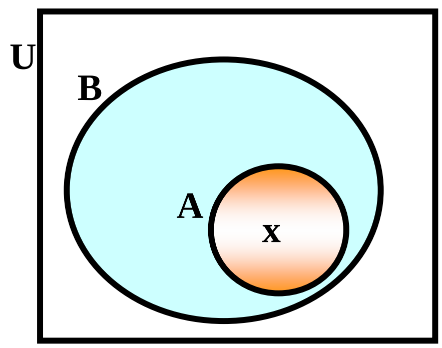
11. Relaciones entre conjuntos

Subconjuntos

Un conjunto **A** es un subconjunto de un conjunto **B**, si todo elemento del conjunto A también es elemento del conjunto **B**.

Simbólicamente esta relación se expresa así:

A ⊂ B (se lee A esta contenido en B)
si todo elemento x que está en el conjunto A entonces x también está en B, es decir;
A ⊂ B si todo x ∈ A, entonces x ∈ B



A ⊂ B
x ∈ A
x ∈ B

Figura No. 5

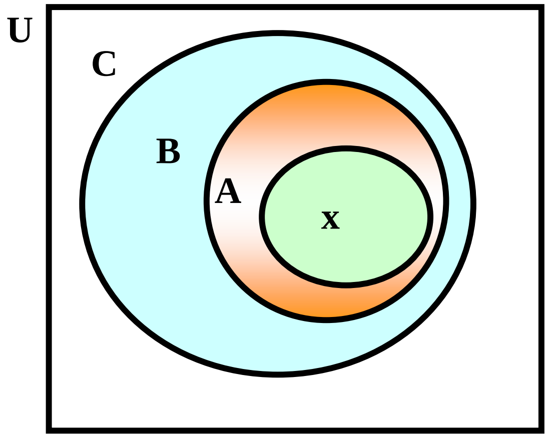
Ejemplo 1:

Si **A = {x / x es dígito par}** y **B = {x / x es dígito},** claramente **A ⊂ B** ya que todo dígito par es dígito. Por extensión la situación se expresa así:

A = {2, 4, 6, 8} y **B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}**
Entonces A es un subconjunto de **B**.

Un resultado muy útil e importante acerca de la contenencia entre conjuntos es el siguiente:
Si **A** es un subconjunto de **B** y **B** es un subconjunto de **C**, entonces, **A** es un subconjunto de **C**; simbólicamente este enunciado se escribe así:

Sí $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces, $A \subset C$



$$\begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset C \\ \hline A \subset C \\ x \in A \\ x \in B \\ x \in C \end{array}$$

Figura No. 6

La demostración es la siguiente:

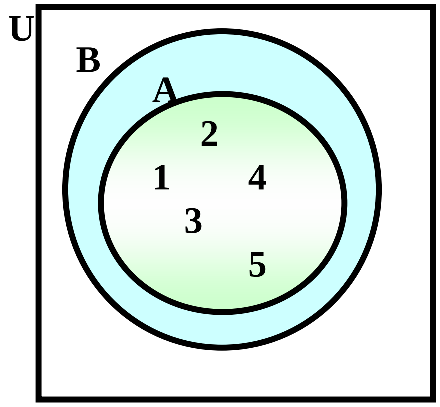
Sí $x \in A$; entonces $x \in B$ porque $A \subset B$, pero **x** también esta en n porque $B \subset C$; por lo tanto si $x \in A$, entonces $x \in C$ y esto se cumple para todo elemento **x** que está en **A**, debido a que el conjunto A esta contenido en el conjunto **B** y **B** a su vez, esta contenido en **C**; por consiguiente queda demostrado que $A \subset C$.

Si **A**, **B** y **C** son tres conjuntos no vacíos que verifican las condiciones $A \subset B$ y $B \subset C$, ¿qué se puede concluir de A con respecto a **C**?

12. Igualdad entre conjuntos

*El conjunto **A** es igual al conjunto **B** si ambos conjuntos tienen los mismos elementos, es decir, si todos los elementos de **A** pertenecen a **B** y si todos los elementos de **B** pertenecen al conjunto A.* La igualdad entre conjuntos se simboliza de la siguiente forma:

$$A = B \ \textbf{ si } \ A \subset B \ \textbf{ y } \ B \subset A$$



A ⊂ B
B ⊂ A

B = A

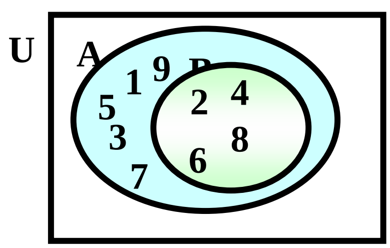
Figura No. 7.

Ejemplo 1.

Si **M = {1, 1, 0, 2}** y **N = {2, 1, 0, 1}**, claramente se observa que **M ⊂ N** y que **N ⊂ M**, por lo tanto **M = N**.

Ejemplo 2.

Si **A = {x / x es dígito}** y **B = {x / x es dígito par},** se puede observar que **B ⊂ A** pero **A ⊄ B**, por lo tanto el conjunto **A** no es igual al conjunto **B**, lo cual se escribe, **A ≠ B**.



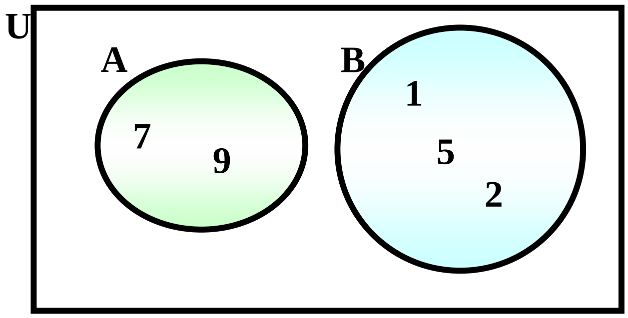
B ⊂ A
A ⊄ B

A ≠ B

Figura No. 8

Conjuntos Completamente Diferentes o Disyuntos:

Es importante destacar que cuando dos conjuntos son completamente diferentes (no tienen ningún elemento en común) reciben el nombre de conjuntos disyuntos.



A ⊄ B y
B ⊄ A y no hay elementos

Figura No. 9.

Ejemplo 3.
Los conjuntos **A = {x / x es dígito par}** y **B = {x / x es dígito impar}** no tienen ningún elemento en común, es decir **A** y **B** son disyuntos.

13. Operaciones entre conjuntos

Así como las operaciones suma, resta, multiplicación y división están definidas sobre los números reales, también existen operaciones definidas entre los conjuntos como la unión, intersección, complemento, diferencia, diferencia simétrica y producto cartesiano; éstas se estudiarán en las siguientes secciones.

Unión

Si **A** y **B** son dos conjuntos no vacíos, se define la unión entre **A** y **B** como el conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto **A** o al conjunto **B**.

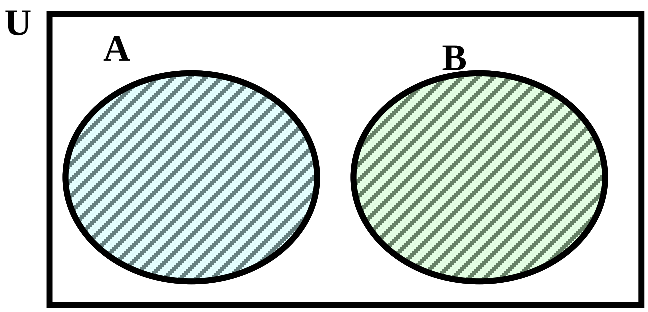
Simbólicamente la unión se define así:

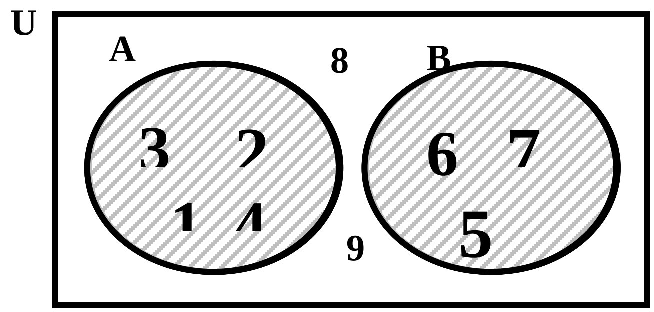
A U B = {x / x ∈ A, v , x ∈ B}, donde el símbolo **"v"** se lee **"o".**

Para representar gráficamente una operación entre conjuntos, se debe tener en cuenta la relación que exista entre ellos, según los siguientes casos:

Caso 1. Que los conjuntos no tengan ningún elemento en común. (conjuntos disyuntos).

La parte subrayada representa la unión entre los conjuntos **A** y **B**.





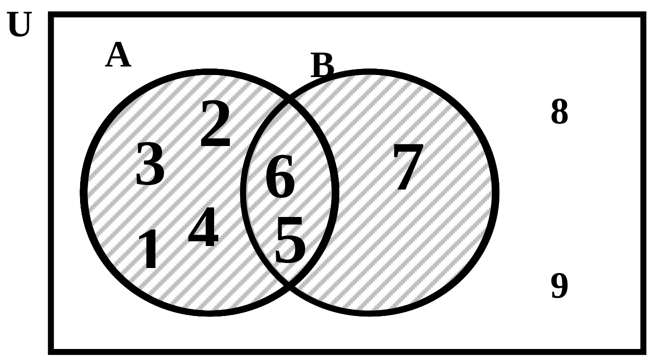
A U B

Figura No. 10.

U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4}
B = {5,6,7}

A U B = {1,2,3,4,5,6,7}

Caso 2. Que los conjuntos tengan sólo unos elementos en común. Subconjunto propio

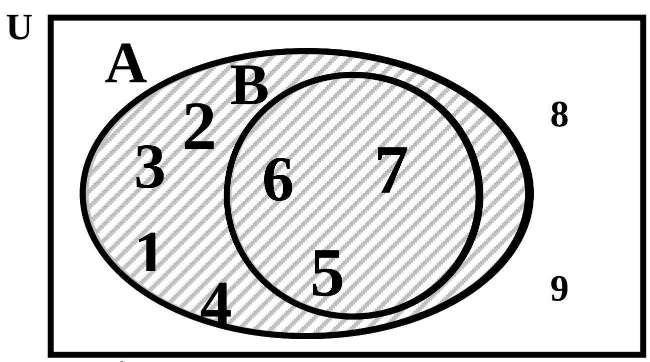


U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6}
B = {5,6,7}
A U B = {1,2,3,4,5,6,7}

Figura No. 11

Caso 3. Que un conjunto este contenido en el otro.

la parte sombreada indica la operación.

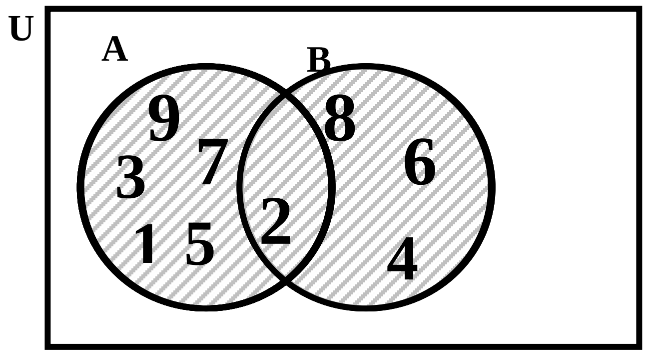


U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6,7}
B = {5,6,7}
A U B = {1,2,3,4,5,6,7}

Figura No. 12

Ejemplo 1.

Si **A = {x $\in$ N / x es dígito par o dígito primo}**, gráficamente la representación de está unión es:



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,5,7,9}
B = {2,4,6,8}

A U B = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}

Figura No. 13

La figura No.3 permite apreciar que el único dígito que es a la vez par y primo es el número 2; esto conlleva a la formulación de la siguiente operación entre conjuntos:

Intersección

Se define la intersección entre dos conjuntos **A** y **B** como el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen simultáneamente al conjunto **A** y al conjunto **B**.

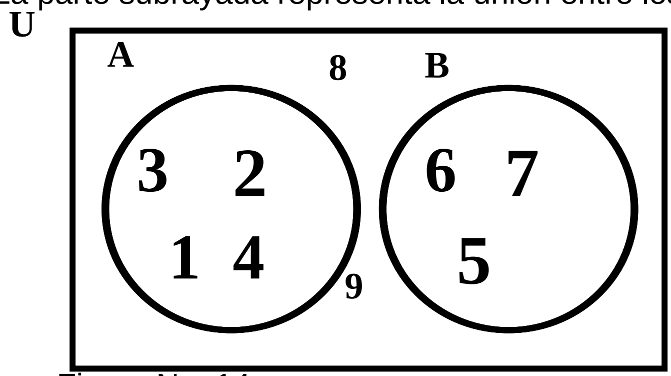
Simbólicamente la intersección se expresa así:

$$\mathbf{A \cap B = \{x \,/\, x \in A, \wedge ,x \in B\}}$$

el símbolo “∩” se lee intersección y el símbolo “∧” se lee **y**.

Caso 1. Que los conjuntos no tengan ningún elemento en común. (conjuntos disyuntos).

La parte subrayada representa la unión entre los conjuntos **A** y **B**.



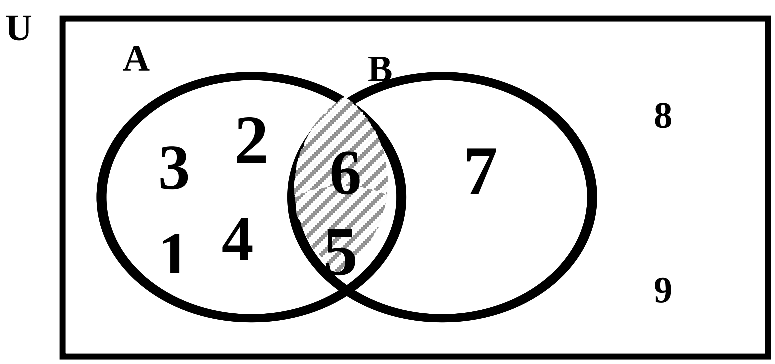
U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4}
B = {5,6,7}

A ∩ B = { }

Figura No. 14.

Se puede observar que cuando dos conjuntos son diferentes, su intersección es vacía y los conjuntos se llaman disyuntos, como ya se había mencionado;

Caso 2. Que los conjuntos tengan sólo unos elementos en común.



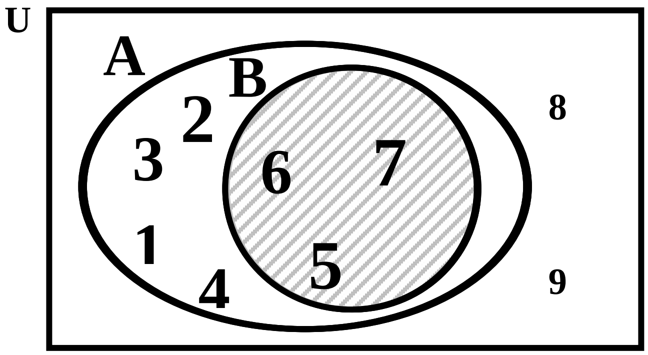
U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6}
B = {5,6,7}

A) B = {5,6 }

Figura No. 15

Caso 3. Que un conjunto este contenido en el otro.

La parte sombreada indica la operación:



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6,7}
B = {5,6,7}

A ∩ B = {5,6,7 } = B

Figura No. 16

Esto permite afirmar que si **A ⊂ B**, entonces. **A ∩ B = A**; análogamente se puede inferir que si **B ⊂ A**, entonces, **A ∩ B = B.**

A continuación se realiza la demostración analítica para el caso 3 de la **figura No. 16**, la otra situación si **B ⊂ A,** entonces, **A ∩ B = B**, se deja como ejercicio complementario (se encuentra al final del capítulo), esta demostración es muy similar a la que se hará a continuación, sin embargo la puede consultar en el libro, Teoría de conjuntos de Seymour Lipschutz.

Si **A ⊂ B**, por definición de contenencia entre conjuntos se puede afirmar que todo elemento **x** ∈ **A**, entonces **x** ∈ **B**; por definición de intersección, éstos elementos **x** forman el conjunto **A ∩ B** y como todos estos son elementos de **A**, se puede concluir que **A ∩ B = A**.

Ejemplo 1.
Dados los conjuntos:
M = {x ∈ N / x es múltiplo de 2}
N = {x ∈ N / x es múltiplo de 3}
P = {x ∈ N / x es impar}

Se pueden analizar las siguientes intersecciones:

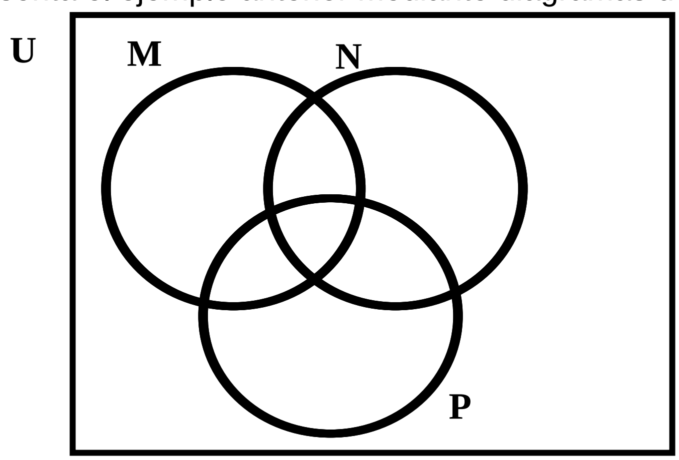
1. **M ∩ N** = {6, 12, 18, 24, 36,…}, escrito por comprensión es:
   M ∩ N = {x ∈ N / x es múltiplo de 6}.
2. **M ∩ P = Ø** , no existe ningún número natural que sea múltiplo de **2** y a la vez impar.

3. **Ø ∩ M =Ø** , El conjunto vacío está contenido en cualquier conjunto, en particular en **M**, esto es **Ø ⊂ M**, luego se puede concluir que **Ø ∩ M = Ø .**
4. Para hallar la intersección **M ∩ N ∩ P**, se puede encontrar la intersección de **M** con **N** y luego con el conjunto P, es decir, hay que encontrar los elementos que están en los tres conjuntos: **M, N y P.**

En este caso **M ∩ N = {x ∈ N / x es múltiplo de 6}** y éste intersecado con el conjunto **P** está formado por los múltiplos de 6 que son impares, es decir, **M ∩ N ∩ P = {x ∈ N / x es impar y múltiplo de 6}**, por extensión el conjunto es:

M ∩ N ∩ P = Ø , pues no existe ningún número natural que sea a la vez impar y múltiplo de **6**.

Ejercicio propuesto:
Representa el ejemplo anterior mediante diagramas de Venn



U =
M =
N =

M ∩ N =

M ∩ P =

M ∩ N ∩ P =

Figura No. 17

Diferencia

Según los tres casos estudiados, se puede afirmar que al comparar dos conjuntos no vacíos, puede suceder que:

1. No tengan ningún elemento en común, (conjuntos totalmente diferentes).
2. Sólo algunos elementos sean comunes, (conjuntos parcialmente diferentes o parcialmente iguales)
3. Un conjunto este contenido en el otro.
4. Tengan exactamente los mismos elementos, (conjuntos iguales)

En los numerales 1, 2 y 3, se puede formar un conjunto con los elementos que le faltan a un conjunto para ser igual a otro, este conjunto así formado, se denomina diferencia entre conjuntos.

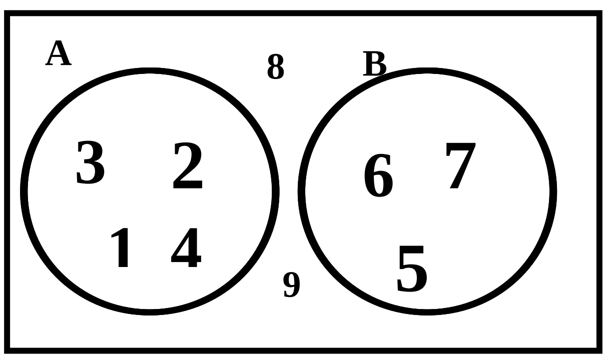
Si **A** y **B** son dos conjuntos no vacíos, entonces se define la diferencia entre **A** y **B** así:

$$A - B = \left\{ x \,/\, x \in A, \wedge, x \notin B \right\}$$

Esto se lee: **A** menos **B**, es el conjunto formado por los elementos que están en el conjunto A pero no en el **B.**

En la siguientes gráficas, la parte sombreada representa la diferencia entre los conjuntos **A** y **B**.

Caso 1. Que los conjuntos no tengan ningún elemento en común. (conjuntos disyuntos).

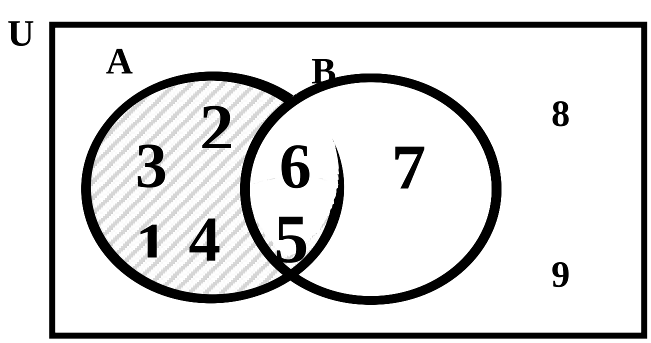


U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4}
B = {5,6,7}
A - B = A = {1,2,3,4}
B - A = B = {5,6,7}

Figura No. 18.

Se puede observar que cuando dos conjuntos son diferentes, su diferencia es vacía y los conjuntos se llaman disyuntos, como ya se había mencionado;

Caso 2. Que los conjuntos tengan sólo unos elementos en común.

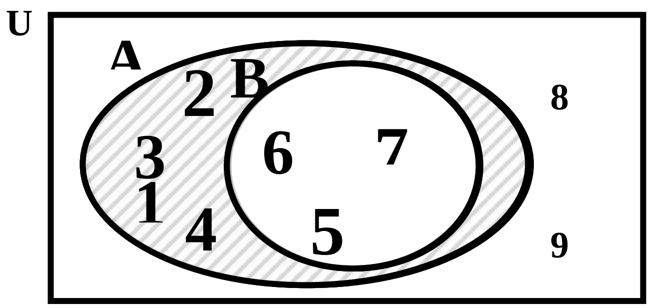


U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6}
B = {5,6,7}
A - B = {1,2,3,4}

Figura No. 19

Caso 3. Que un conjunto este contenido en el otro.

La parte sombreada indica la operación.



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6,7}
B = {5,6,7}

A - B = {1,2,3,4}

B - A = { }

Figura No. 20

En la figura 20, se puede observar que todos los elementos que están en **B**, están en **A (debido a que B ⊂ A),** por lo tanto no existe ningún elemento que pertenezca a la diferencia **B – A** y en consecuencia **B – A = Ø .** Surge ahora, la siguiente inquietud:

¿Cuál será la diferencia entre **A** y **B (A – B)** cuando **B ⊂ A**?

Esta pregunta se plantea formalmente en el numeral **4** de los ejercicios complementarios y el propósito es realizar la demostración con el apoyo del tutor.

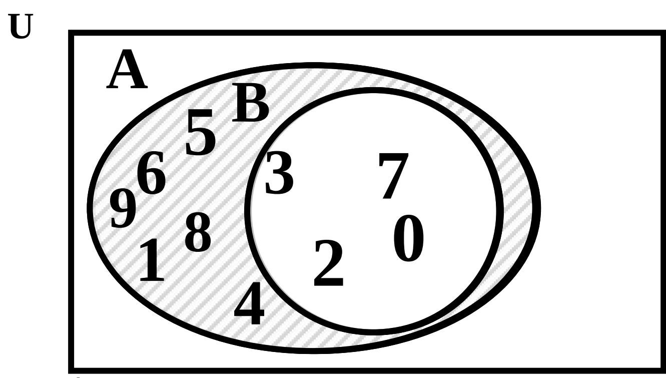
Ejemplo 1.

Dados los conjuntos **A = {x / x es un dígito}** y **B = {0, 2, 3, 7}** hallar **A – B** y **B – A** y hacer la representación gráfica.

Para efectuar estas operaciones se escriben los conjuntos por extensión, así:

A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} y **B = {0, 2, 3, 7},** entonces:

A – B = {1, 4, 5, 6, 8, 9} y **B – A = Ø ,**



U = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
B = {0,2,3,7}

A - B = {1,4,5,6,8,9}

B - A = { }

Figura No. 21

Diferencia simétrica

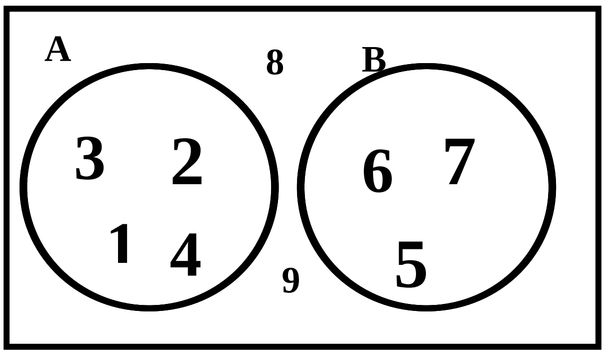
Se define la diferencia simétrica entre dos conjuntos no vacíos **A** y **B**, como el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto **A** o al conjunto **B**, pero no pertenecen simultáneamente a ambos conjuntos.

Simbólicamente la diferencia simétrica entre **A** y **B** se escribe así:

$$A \square B = \left\{ x / x \in A, \vee, x \in B, \wedge x \notin \left(A \cap B \right) \right\}$$

En la siguientes gráficas, la parte sombreada representa la diferencia simétrica entre los conjuntos **A** y **B**.

Caso 1. Que los conjuntos no tengan ningún elemento en común. (conjuntos disyuntos).



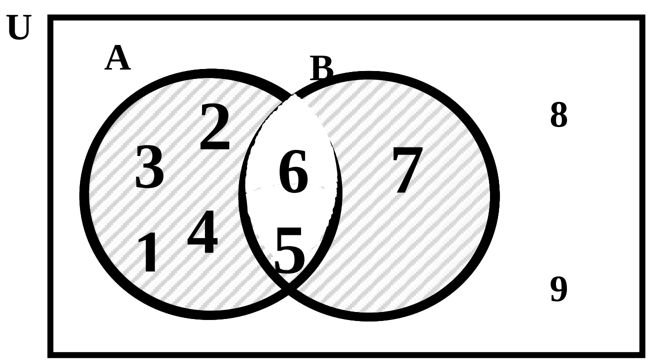
U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4}
B = {5,6,7}

A ∆ B = {1,2,3,4,5,6,7}
B ∆ A = {1,2,3,4,5,6,7}

Figura No. 22.

Se puede observar que cuando dos conjuntos son diferentes, su interse es vacía y los conjuntos se llaman disyuntos.

Caso 2. Que los conjuntos tengan sólo unos elementos en común.



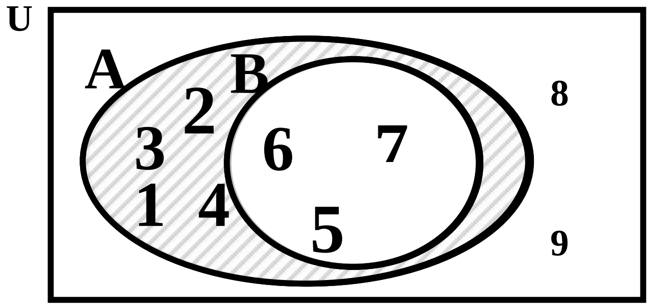
U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6}
B = {5,6,7}

A ∆ B = {1,2,3,4,7}
B ∆ A = {1,2,3,4,7}

Figura No. 23

Caso 3. Que un conjunto este contenido en el otro.

La parte sombreada indica la operación.

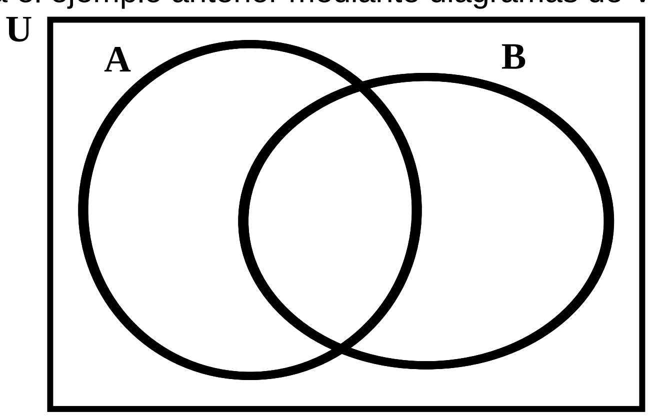


U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6,7}
B = {5,6,7}
A Δ B = {1,2,3,4}
B Δ A = {1,2,3,4}

Figura No. 24

Ejemplo 1.
Si **A = {x / x es una letra de la palabra INGENIERIA} y B = {x / x es una letra de la palabra SISTEMAS}**, entonces **A Δ B = {N, G, R, M, S, T}.**

Ejercicio propuesto:
Representa el ejemplo anterior mediante diagramas de Venn

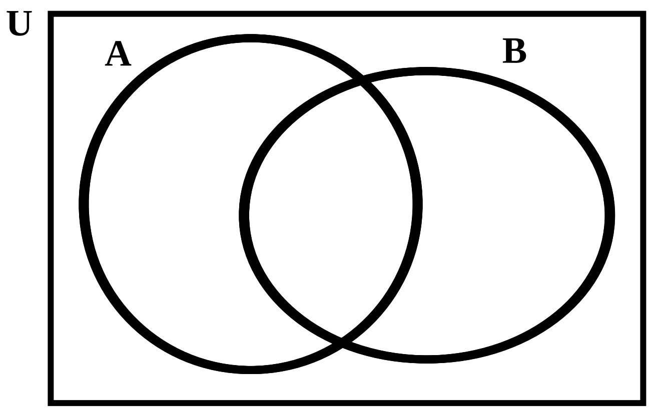


U =
A =
B =
A ∩ B =
A Δ B =
A U B =

Figura No. 25

Ejemplo 2.
Dados los conjuntos **M = {1, 2, 3, 4}** y **N = {4, 5},** la diferencia simétrica entre **M** y **N** es:
M Δ N = {1, 2, 3, 5}, claramente se puede observar que el número 4, no pertenece a la diferencia simétrica porque forma parte de la intersección entre **M** y **N**.

Ejercicio propuesto:
Representa el ejemplo anterior mediante diagramas de Venn



U =
A =
B =
A ∩ B =
A Δ B =
A U B =

Figura No. 26

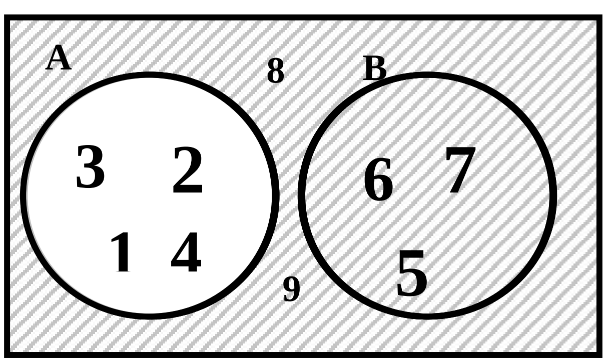
Complemento

Si **A** es un conjunto no vacío, el complemento de **A**, simbolizado por **A'**, está formado por todos los elementos que no pertenecen al conjunto **A**, es decir,

$$A' = A^c = A^* = \sim A = \neg A = \overline{A} = \{x \,/\, x \notin A\}$$

En la siguientes gráficas, la parte sombreada representa el complemento del conjunto A.

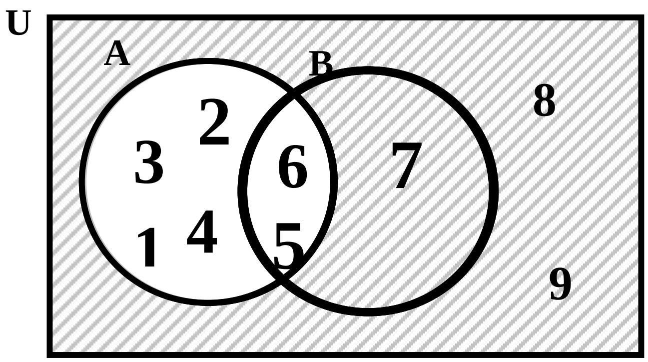
Caso 1. Que los conjuntos no tengan ningún elemento en común. (conjuntos disyuntos).



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4}
B = {5,6,7}
A' = {5,6,7,8,9}

Figura No. 27.

Caso 2. Que los conjuntos tengan sólo unos elementos en común

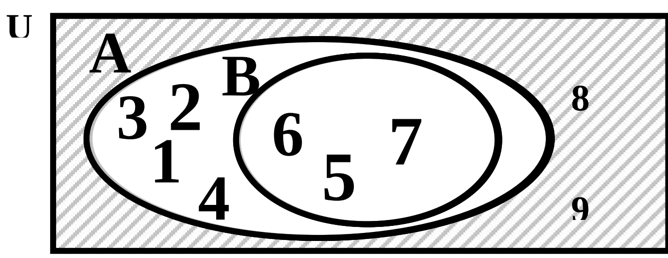


U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6}
B = {5,6,7}
A' = {7,8,9}

Figura No. 28

Caso 3. Que un conjunto este contenido en el otro.

La parte sombreada indica la operación.



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6,7}
B = {5,6,7}
A' = {8,9}

Ejemplo 1.
Al considerar el conjunto universal como el conjunto de los estudiantes de Ingeniería de sistemas de la UNAD y **A** como el conjunto de los estudiantes que están en el primer semestre, el complemento del conjunto **A** (**A'**) será el conjunto formado por todos los estudiantes de ingeniería de sistemas de la UNAD que no cursan primer semestre, esto es:

U = {x ϵ UNAD / x estudia ingeniería de sistemas}.
A = {x ϵ Ingeniería de sistemas / x ϵ Primer semestre}.
A' = {x ϵ Ingeniería de sistemas / x ∉ Primer semestre}.

14. Algebra de conjuntos

Propiedades de las operaciones entre conjuntos
Las siguientes cuatro propiedades, son válidas para las operaciones de unión e intersección:

a. Leyes de idempotencia:

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

b) Leyes asociativas:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

b. Leyes conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

d) Leyes distributivas:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Las siguientes propiedades están relacionadas con los conjuntos Universal “**U**” y vacío **Ø** :

e) Leyes de identidad:

$$A \cup U = U \qquad A \cap U = A$$
$$A \cup \Phi = A \qquad A \cap \Phi = \Phi$$

Propiedades con respecto al complemento.

f) Leyes del complemento:

$$A \cup A' = U \qquad A \cap A' = \Phi$$
$$(A')' = A \qquad \Phi' = U$$

g) Leyes de D’Morgan:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Estas leyes se pueden representar gráficamente de la siguiente forma:

a) Leyes de idempotencia:

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

¿Qué obtenemos de interceptar el conjunto A con él mismo?
¿Qué pasa si unimos A con A? :

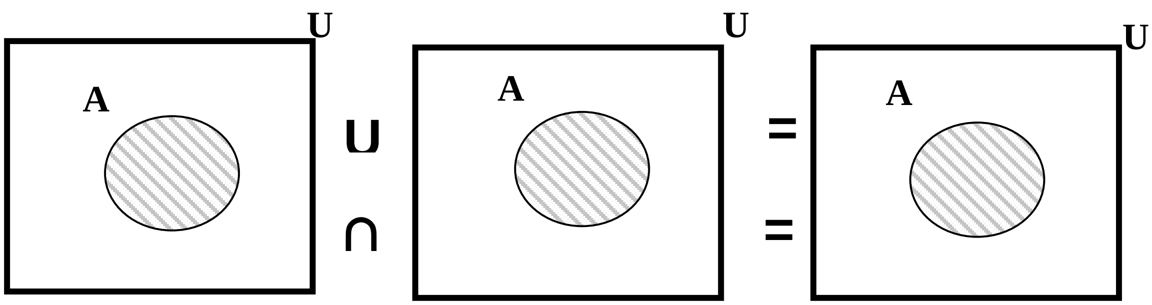


Figura No. 33 A unido con A es igual a A, A interceptado con A es igual a A

b) **Leyes de identidad:** $A \cup U = U$ $A \cap U = A$
$A \cup \Phi = A$ $A \cap \Phi = \Phi$

¿Qué se obtiene de unir el conjunto A con el universo? :

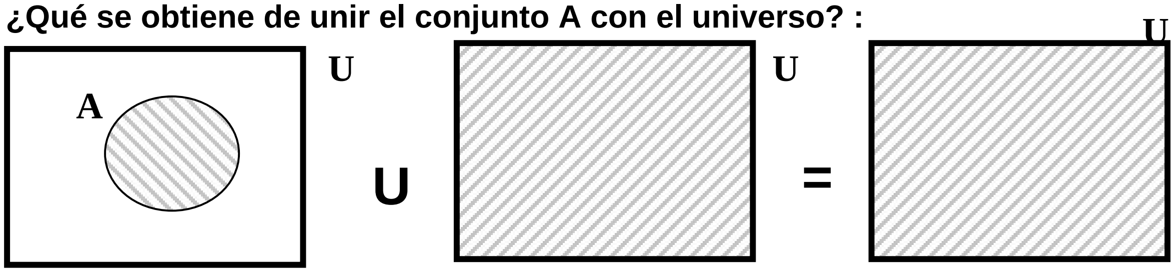


Figura No. 34 A unido con el universo es igual al universo

¿Qué se obtiene de unir el conjunto A con el vacío? :

Figura No. 35 A unido con el vacío es igual al conjunto A

¿Qué tienen en común A y el universo?

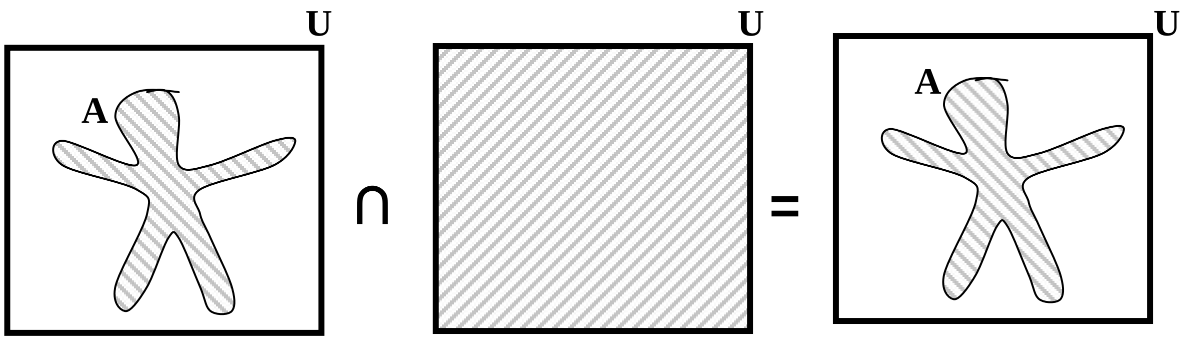


Figura No. 36 A y el universo tienen en común el mismo conjunto A

¿Qué tienen en común A y el vacío? :

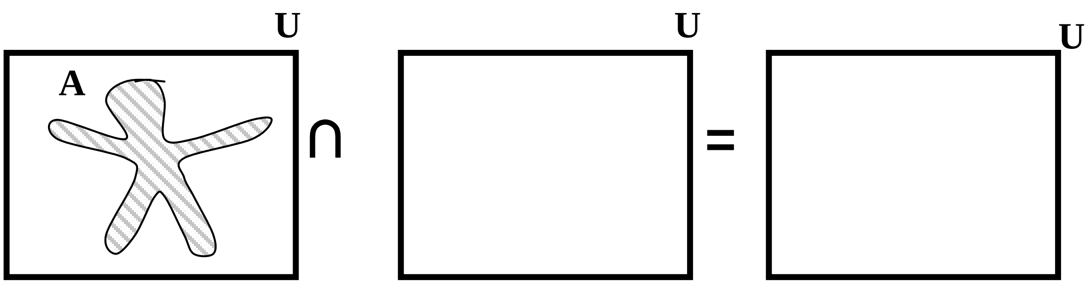


Figura No. 37 El conjunto A y el vacío tienen en común el vació

c) Leyes del complemento:

$A \cup A' = U$ $\qquad$ $A \cap A' = \Phi$

$(A')' = A$ $\qquad$ $\Phi' = U$

¿Qué se obtiene de unir A con lo que no es A?

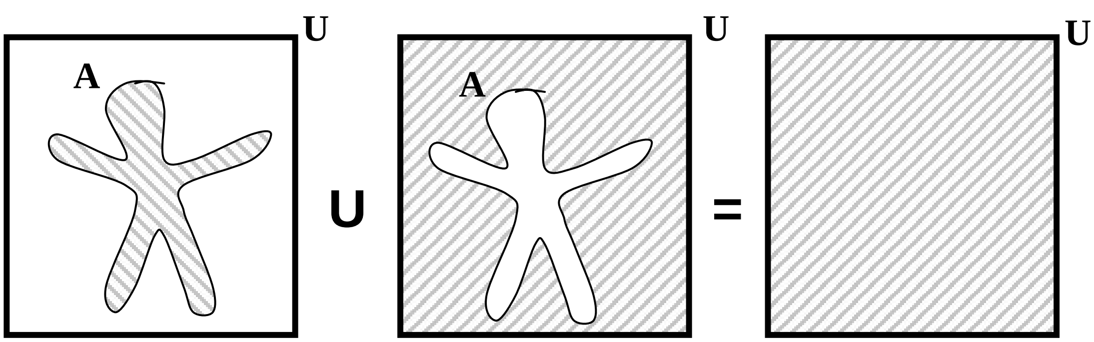


Figura No. 38 Al unir el conjunto A con los elementos que no están en A se obtiene el universo

¿Qué tienen común A con lo que no es A?

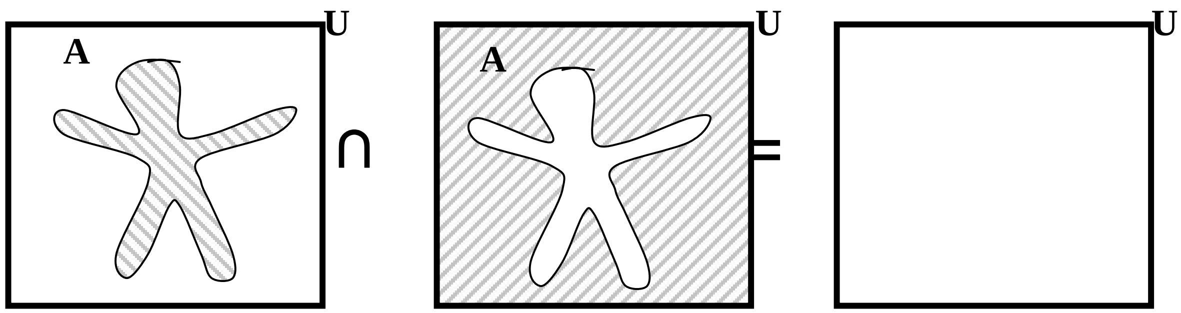
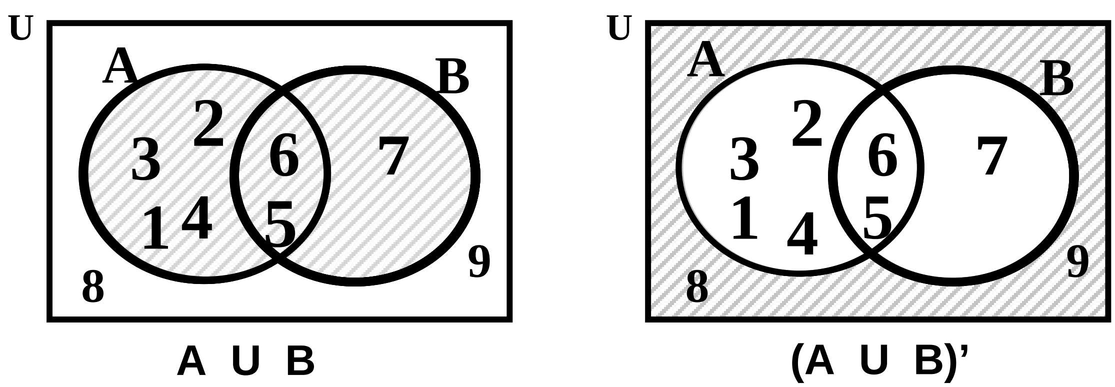


Figura No. 39

d) Leyes de D' Morgan:

(A U B)' = A' ∩ B'
(A ∩ B)' = A' U B'

La demostración gráfica de (A U B)' = A' ∩ B' es la siguiente:



Así hemos encontrado el área que representa a la primera parte de la igualdad, ahora representamos la segunda parte, se espera que los resultados sean iguales:

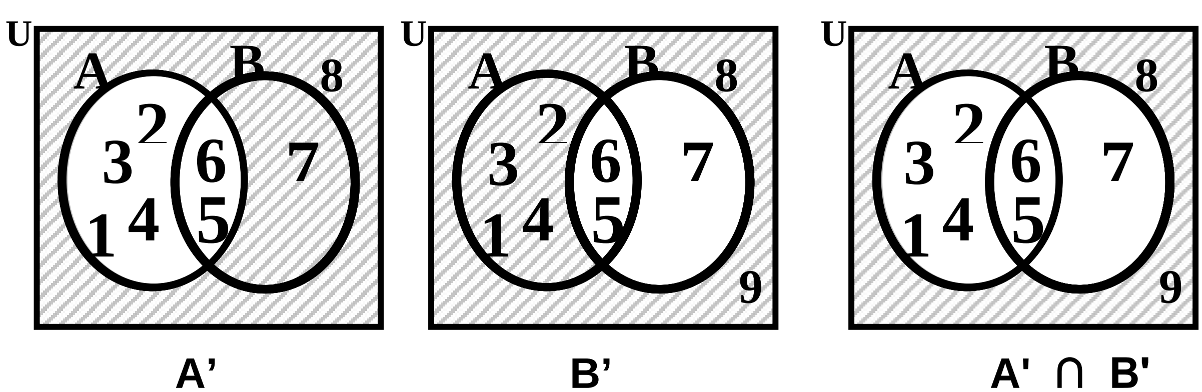
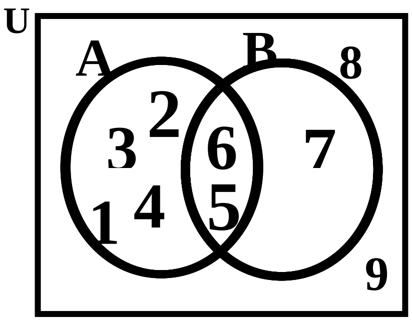


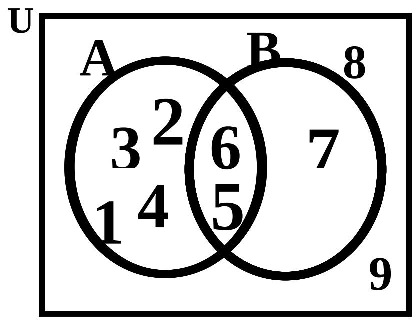
Figura No. 40

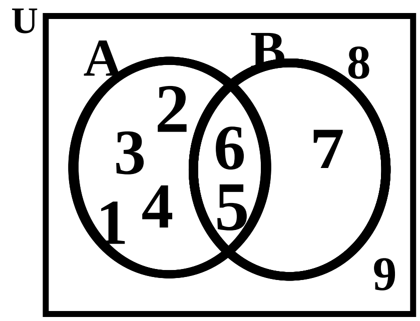
Ejercicio propuesto:

Realiza la demostración gráfica del teorema de D' Morgan para: **(A ∩ B)' = A' U B'** para ello subraya el área correspondiente.

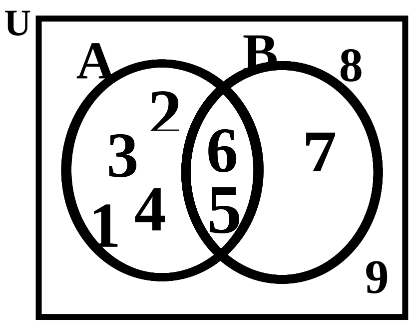
Primera parte

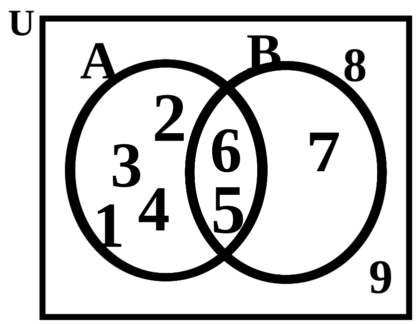


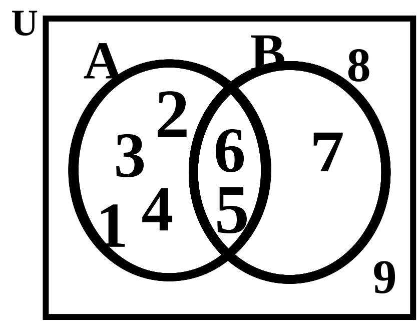




__________ ______ ___________







__________ ______ ___________

Figura No. 41

Las anteriores leyes están formuladas por pares, lo cual verifica la naturaleza dual de la teoría de conjuntos.

Ejercicio propuesto:
Simplificar aplicando las leyes del Algebra de conjuntos:

1) **((A ∩ B)')’**
2) **(A’) ’ ∩ (((B)') ’)**
3) **(A' U A') U B'**
4) **(A ∩ Φ)'**
5) **(A ∩ Φ’)'**
6) **(A’ ∩ U’) '**
7) **(A ∩ A)' U (A' U A')**
8) **(A U A’) '**
9) **(A’ ∩ A’) ' U A'**
10) **((A’) ’ U U’)' ∩ A'**

Segunda parte de la igualdad **A' U B'**:

Principio de dualidad

Si se intercambian las operaciones unión **(U)** por intersección **(∩),** como también el conjunto universal (**U**) por el conjunto vacío (**Φ**), en cualquier razonamiento sobre conjuntos, el enunciado resultante se llama **DUAL** del primero.

Ejemplo 1.

Demostrar que el dual de;

(U U B) ∩ (A U Φ) = A es:
(Φ ∩ B) U (A ∩ U) = A

Tomando la primera parte y por las leyes de identidad se tiene que:

(U U B) ∩ (A U Φ)
U ∩ A = A

Ahora, considerando la segunda y nuevamente aplicando las leyes de identidad se tiene que:

(Φ ∩ B) U (A ∩ U)
Φ U A = A

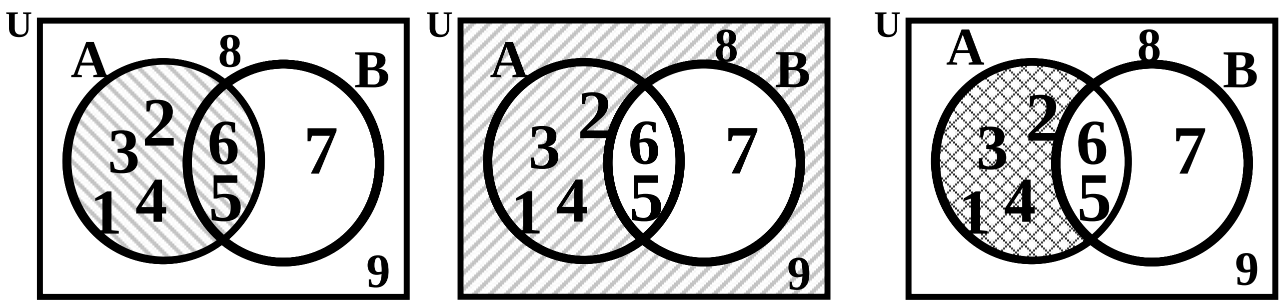
Con lo que queda demostrado.

Ejemplo 2.
Demostrar que el dual de

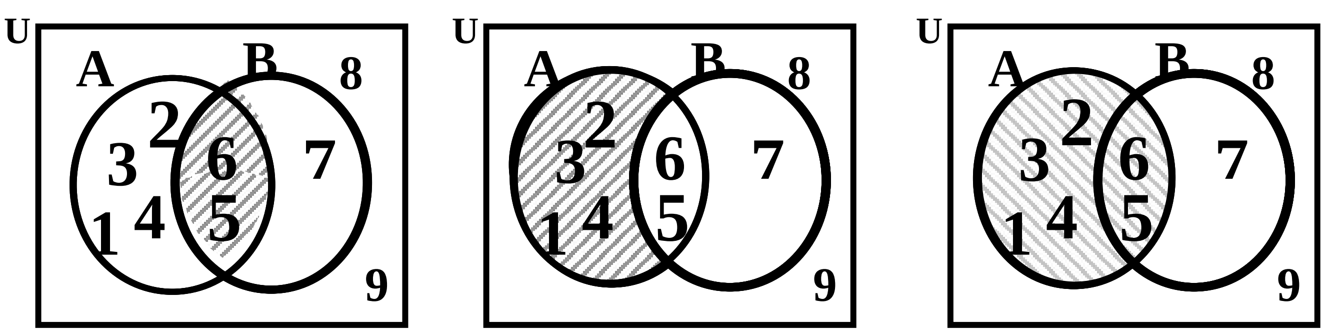
$$(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \text{ es}$$
$$(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$$

En este caso se puede hacer la demostración en forma gráfica así:

i) La primera parte se puede representar de la siguiente forma:



A **B'** **A ∩ B'**



(A ∩ B) U (A ∩ B') = A

Figura No.42 primera parte

Segunda parte: **(A U B) ∩ (A U B') = A**

h) La segunda parte se puede representar de la siguiente forma:

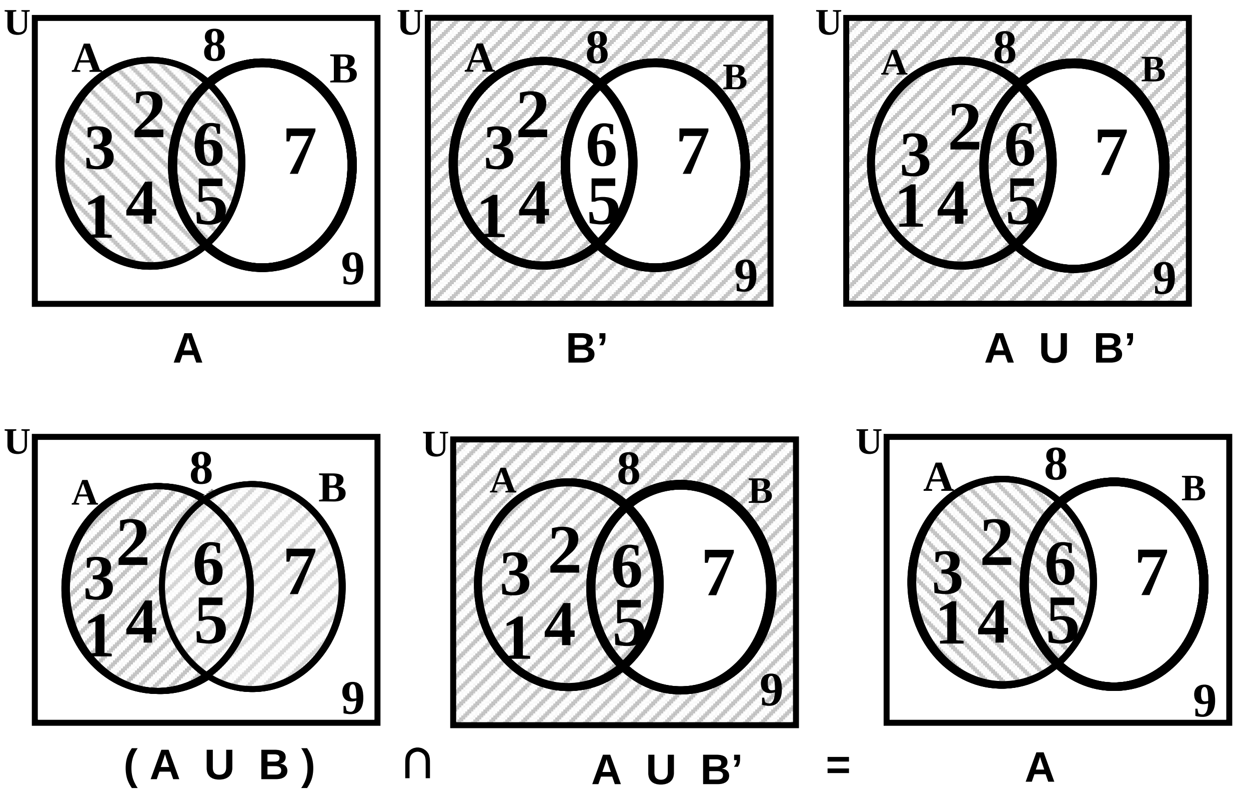
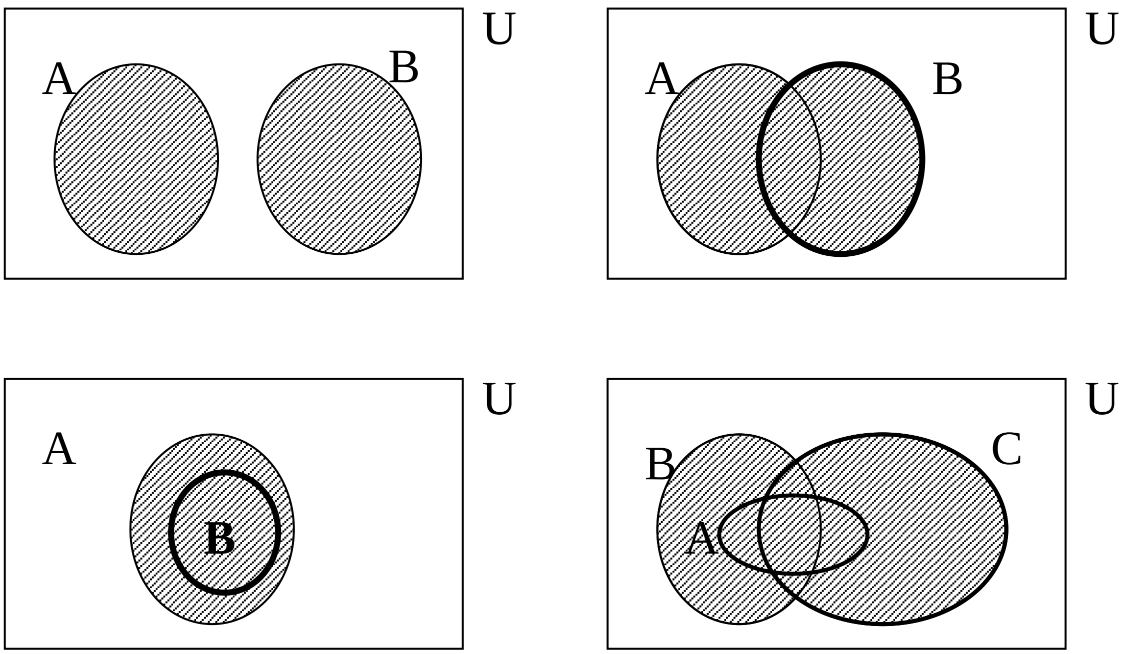


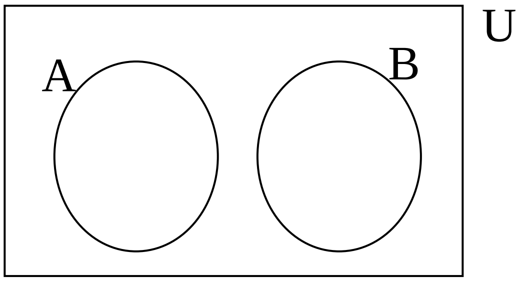
Figura No.43 segunda parte **(A U B) ∩ (A U B') = A**

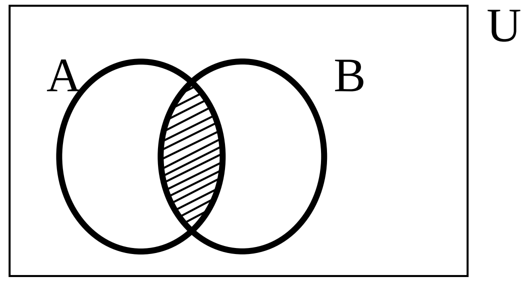
15. En los siguientes diagramas sombrea las áreas correspondientes a las operaciones señaladas:

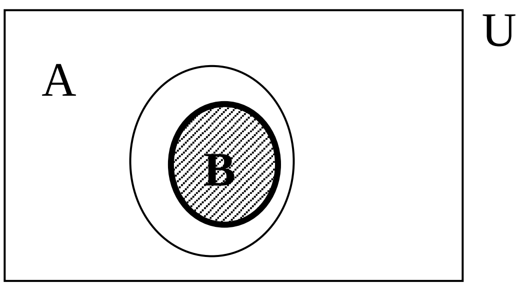
15.1. A unión B

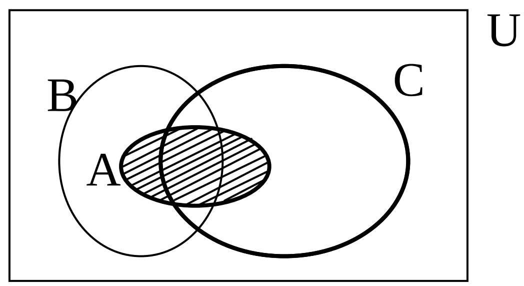


15.2. A intersección B

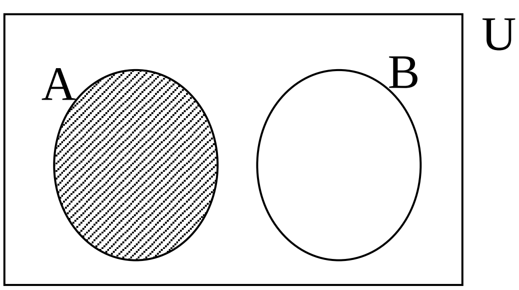


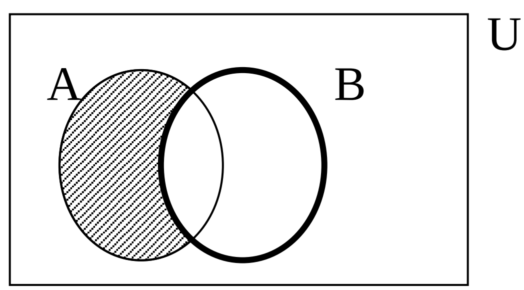


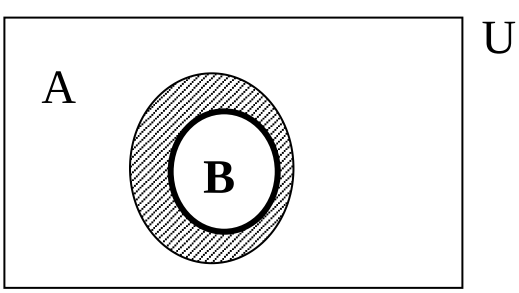


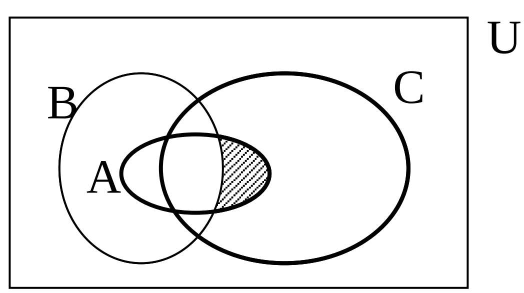


15.3. A menos B

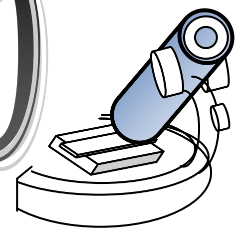








LABORATORIO



Querido estudiante, en esta sección denominada “El laboratorio” encontrarás acceso a dos simuladores de tablas de verdad que te serán de utilidad para verificar tus tablas.

Para acceder al aplicativo debes hacer clic en Enlace al generador pero antes, acepta la invitación para estudiar el video correspondente.

SIMULADORES

Enlace al: Generador de tablas de verdad No.1:

Video: Ejemplo de uso del generador de tablas de verdad:

Enlace al: **Generador de tablas de verdad No.2:**

Video: Ejemplo de uso del generador de tablas de verdad

Bibliografía

Bustamante, Sandra., Cortés, D. Juvenal., et al. (2008). *Razonamiento Lógico. Razono y actúo con lógica*. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Galindo Patiño, N. J. (1999) *Lógica Matemática*. Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD. Santa Fe de Bogotá. D.C.

Suppes, Patrick. Hill, Shirley (1988). *Primer curso de lógica Matemática*. Reverté. Santafé de Bogotá.

Picacenza, Eduardo (1991). *Lógica*. Universidad Nacional Abierta. Caracas.

Salazar, R. (2008). *Guía didáctica para el diseño de la Guía de Actividades de los cursos por mediación Tradicional*. Vicerrectoría de Medios y Mediaciones Pedagógicos. Universidad Nacional Abierta y a Distancia. UNAD. Bogotá. D.C.

Valenzuela, Gustavo E. (1999). *Lógica. Nociones y Aplicaciones*. McGraw-Hill. México.